Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

2016

**LUÍSA MARIA
MILHEIRO LIMA
COSTA MARQUES**

CIRCO MATEMÁTICO

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

2016

LUÍSA MARIA MILHEIRO LIMA COSTA MARQUES

CIRCO MATEMÁTICO

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e do Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

Presidente	**Professora Doutora Isabel Brás** Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro
Vogal - Arguente Principal	**Professor Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos** Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Viseu
Vogal - Orientador	**Professor Doutor Ricardo Pereira** Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Aos meus orientadores que me incentivaram, desde o primeiro instante a dar continuidade a este trabalho, mesmo nos momentos em que pensei que já não seria capaz.
Agradeço-lhes a disponibilidade, as sugestões, as orientações e as críticas sempre construtivas, que permitiram a conclusão desta árdua tarefa.
Muito obrigada ao João Tomás e à Joana por me terem cedido tempo no papel de mãe para poder dar asas a esta minha aventura. Obrigada aos avós pelo apoio incondicional.
Ao meu marido quero agradecer a forma como me ajudou a nunca esmorecer, nem desistir, colaborando sempre que foi necessário, para que pudesse concluir mais uma etapa da minha vida.

palavras-chave

Circo Matemático, Magia, Cartas, Números, Topologia, Programas para espetáculos.

resumo

Esta dissertação tem por base a divulgação do projeto do Circo Matemático. Pretende-se que o leitor reúna as condições necessárias e suficientes para poder realizar um espetáculo de Circo Matemático. Para tal, são fornecidos programas que podem ser implementados na realização de espetáculo de Circo Matemático. Ao longo da dissertação são descritos pormenorizadamente, os truques e habilidades usados nos espetáculos.

Enquanto professores, e após tomar conhecimento deste projeto, será possível que aumente o valor que se dá à Matemática Recreativa, e se compreenda que esta possa ser, no futuro, um trunfo a utilizar, quer para a auto motivação dos próprios docentes, quer para incentivar os alunos ao estudo da disciplina, desenvolvendo de modo natural o gosto pela Matemática.

keywords

Mathematician Circus, Magic, Letters, Numbers, Topology, Programs for shows.

abstract

This dissertation is based on the disclosure of the Mathematical Circus project. It is intended that the reader meets the necessary and sufficient conditions to perform a Mathematical Circus show. For this purpose, are provided programs that can be implemented in the materialization of a Mathematician Circus show. Throughout the dissertation are described in detail, tricks and skills used in live performances.

As teachers, and after becoming aware of this project, it will be possible to increase the value given to the Recreational Mathematics, and understand that it may be in the future an asset for use either for self motivation of the teachers themselves, either to encourage students to study the discipline, developing in a natural way the taste for Mathematics.

Índice

Capítulo 1

1. Introdução

No ano letivo 2013/2014, assisti a um espetáculo do Circo Matemático na escola sede do Agrupamento de Escolas Manuel Gomes de Almeida, em Espinho, onde lecionava. Tratava-se de um projeto que eu desconhecia totalmente, que apenas tive conhecimento aquando da proposta desta atividade, por uma das docentes da disciplina de Matemática, na reunião de grupo disciplinar.

Gostei imenso do espetáculo e, saliento acima de tudo, o entusiasmo com que todos os alunos se envolveram nos diversos truques apresentados. O que este espetáculo tem de bastante peculiar é o facto de conseguir cativar a atenção e interesse de todo o tipo de alunos, e em particular, alunos para quem a disciplina de Matemática tem uma conotação bastante negativa e da qual eles se tentam afastar o mais possível.

Posteriormente, e porque já era minha intenção, inscrevi-me no Mestrado em Matemática para professores, do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e por coincidência, algumas das opções dos temas para a dissertação estavam relacionadas com o Circo Matemático. Como tal, foi uma dessas opções que escolhi.

Logo na primeira reunião que tive com os meus orientadores, foi-me apresentado o grande objetivo desta dissertação, permitir que qualquer leitor possa pôr em prática os truques descritos seguindo as orientações que aqui se encontram. Muitos truques de magia baseiam-se em conceitos matemáticos. Há que ter em conta que o leitor pode eventualmente ser um professor da disciplina de Matemática, de qualquer um dos ciclos de escolaridade, que pretenda despertar o interesse pela sua disciplina, na medida que é ela a técnica que tem que ser "dominada" para executar o truque de magia. O uso da magia como recurso pedagógico no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que os estudantes gostem de aprender essa disciplina, despertando o seu interesse. Outro motivo para a utilização de atividades lúdicas nas aulas é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos dos nossos alunos, que se sentem incapacitados para aprender matemática.

A consciencialização dos professores sobre a importância do trabalho matemático recorrendo a atividades lúdicas torna as aulas de matemática, além de dinâmicas, muito mais atrativas e o objetivo da aprendizagem será conquistado: os alunos não memorizarão apenas os conteúdos, mas sim, irão adquirir conhecimento.

Os truques de magia encantam a todos, sejam crianças ou adultos!

Assim sendo, foi delineada a estrutura deste trabalho, destacando-se como parte fundamental, a existência de programas definidos para as várias faixas etárias. Formaram-se quatro grupos: do Pré-escolar ao 1ºano; do 2ºano ao 4ºano; do 5ºano ao 8ºano e, por fim, do

9ºano ao 12ºano de escolaridade. Pretendia-se também que existissem, se possível, dois programas distintos, com truques alternativos, para cada um destes grupos etários.

O trabalho inicial consistiu em transpor para o papel os truques que já eram realizados no espetáculo do Circo Matemático que eu já tinha assistido. Posteriormente, fui acrescentando truques, com níveis de dificuldades distintos, de modo a se integrarem nos quatro grupos que foram definidos. Os truques foram ainda agrupados consoante a sua tipologia, isto é, se eram usadas cartas, se eram fundamentalmente baseados em números, se recorria a materiais manipuláveis, entre outros.

Na sequência da atividade desenvolvida pela equipa de Aveiro do Circo Matemático, já foram elaboradas duas dissertações de mestrado, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, uma intitulada Magia Matemática com Números, da autoria de Ilda Maria da Silva Bastos e outra, Magia Matemática com Cartas, da autoria de Maria Manuela Correia Rodrigues, ambas de 2015. Estas dissertações foram utilizadas como fonte de informação. Alguns dos truques que se podem encontrar nessas dissertações foram utilizados na presente dissertação. Também alguns elementos do Circo Matemático realizaram teses de mestrado tendo como base para os temas por eles trabalhados a Matemática Recreativa, disciplina esta que está na origem do projeto Circo Matemático. Uma destas teses foi escrita por Tiago Hirth e intitula-se "Luca Pacioli and his 1500 Book de Viribus Quantitatis". "De Viribus Quantitatis" é um dos maiores compêndios de matemática recreativa no seu contexto histórico, da autoria de Luca Pacioli. O projeto deu também impulso à edição de um livro "Matemagia", da autoria dos elementos do Circo do núcleo de Lisboa, Alexandre Silva, Pedro Freitas, Jorge Nuno Silva e Tiago Hirth.

Nesta dissertação, pretende-se dar especial destaque ao facto dos truques apresentados poderem ser utilizados em espetáculos, e portanto, também tiveram que ser descritos aspetos não matemáticos, mas que estão diretamente relacionados com a parte prática da montagem de um espetáculo de Circo Matemático. Os truques que se podem encontrar nesta dissertação são uma compilação de truques que foram escolhidos por funcionarem bem em espetáculos com muito público, e que, independentemente do grau de dificuldade de cada um, aliados a uma encenação adequada, os tornam elementos chave para um espetáculo divertido, dinâmico, educativo e, de grande sucesso.

Assim, pretende-se acima de tudo que esta dissertação dê orientações precisas ao leitor, no sentido dele próprio ser capaz de montar um espetáculo, executando os truques descritos, com a respetiva encenação, recorrendo também a dicas que são dadas acerca da indumentária usada pelos artistas, da música utilizada, bem como, sobre a organização e interação que deve existir entre os elementos que participam ativamente em cada uma dos efeitos realizados.

Esta dissertação, e porque a magia está presente ao longo de todo o espetáculo, inicia-se com uma apresentação resumida do panorama global e nacional do ilusionismo ao longo dos tempos. Posteriormente, será feita uma viagem pela origem e história de vida do Circo Matemático. Trata-se de um projeto original, existente apenas em Portugal.

O segundo capítulo consiste na apresentação dos fundamentos matemáticos que estão subjacentes a cada um dos truques descritos, nos capítulos 3 a 6. Atendendo ao grande objetivo desta dissertação, serão apresentados, no capítulo 7, programas que podem ser usados na implementação de um espetáculo de Circo Matemático, adaptados aos vários ciclos de escolaridades, desde o Ensino Pré-Escolar até ao Ensino Secundário. Por fim, a dissertação termina com um breve capítulo de conclusões.

1.1. História da Magia

Em meados do século XVI, um fazendeiro inglês chamado Reginald Scot estava indignado com as condenações por bruxaria e as superstições que associavam tudo ao sobrenatural e resolveu aprender magia com os artistas da época, tentando compreender os seus fundamentos. O seu professor foi um francês chamado Cautares, que o ensinou que um truque de magia, ao ser executado à frente de pessoas que desconhecem esta arte, acaba por ser interpretado como sendo de origem sobrenatural. De um modo geral, as pessoas aceitam aquilo que compreendem, o que não era o caso. Assim, naquela época era muito mais cómodo associar ao sobrenatural, do que aceitar a magia como uma arte que não conseguiam descodificar. (Schlickmann, 2014)

O livro, escrito por Reginald Scot, intitulado *The Discovery of Witchcraft* (*A Descoberta da Bruxaria*), explica vários fundamentos que estão na base dos truques de magia realizados na época e contribuiu para se conseguir perceber a diferença entre bruxaria e truques de magia. Os princípios citados nessa obra podem ser usados até hoje. (Scot, 1584)

Tempos depois, porém, a obra de Reginald Scot foi considerada profana pelo Rei James VI que assumiu o trono inglês e mandou queimar todas as cópias do livro. Por sorte muitos livros sobreviveram e algumas versões originais podem ser usadas até hoje.

A profissão de ilusionista veio a ter prestígio a partir do século XVIII. O maior impulsionador do ilusionismo moderno chamava-se Jean Eugène Robert-Houdin (1805-1871) e era de nacionalidade francesa.

Figura 1: Jean Eugène Robert-Houdin (1805-1871)
(Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Jean Eugène Robert-Houdin)

O seu passado de relojoeiro permitiu-lhe criar ilusões originais que apresentava no seu pequeno teatro para a elite parisiense. Robert-Houdin frequentemente é referido como o “pai do ilusionismo moderno” uma vez que foi um dos primeiros ilusionistas a trazer a magia para os palcos elegantes dos teatros e de festas privadas, afastando-se do mágico saltimbanco que atuava nas ruas e feiras, até porque foi ele quem adotou uma postura mais formal para suas vestimentas, bem diferente dos trajes usados pelos artistas teatrais da época.

Harry Houdinie (1874-1926), nome adotado por Ehrich Weisz devido à sua grande admiração por Robert-Houdi foi outro destaque nessa profissão de ilusionista. (Schlickmann, 2014)

Figura 2: Harry Houdini pronto para uma apresentação em 1899
(Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Harry Houdinie)

No final do século XX, a magia voltou a estar no auge, com ilusionistas como Doug Henning, e posteriormente, com o seu pupilo David Copperfield, o qual teve destaque em grande escala devido à sua participação em programas televisivos de grande audiência, em espetáculos na Broadway e nas suas digressões mundiais.

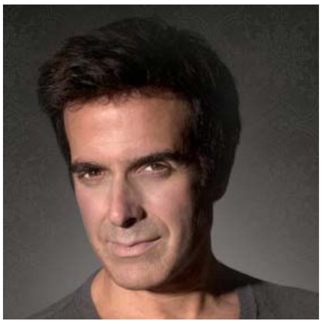


Figura 3: David Copperfield
(Fonte: www.davidcopperfield.com)

Na bibliografia de David Copperfileld (http://www.davidcopperfield.com/html/biography.html) pode ler-se o seu testemunho: "Por vezes são necessários dois anos para desenvolver truques de ilusionismo, e por vezes até mais." Ele afirma ainda que gosta de desafios para ele e para a sua equipa, no sentido de desenvolver novos métodos e ideias, nem sempre adotando o caminho mais fácil. Oprah Winfrey designou-o como "O maior ilusionista do nosso tempo". Ele mudou para sempre o futuro da sua arte, mostrando que não há limites e que a magia pode ser tão vasta quanto a imaginação. É importante frisar que David Copperfileld nasce numa indústria de magia que está já bem desenvolvida e que continua no auge até aos dias de hoje. Outros nomes sonantes da arte da magia internacional são David Blane, Criss Angel, Ricky Jay, Penn & Teller, James Randi, entre muitos outros. Também em Espanha se destacam alguns mágicos, por exemplo, Juan Tamariz, Arturo Ascanio, Dani DaOrtiz. Pela espetacularidade e aparente simplicidade do efeito sugere-se a visualização do vídeo no endereço www.youtube.com/watch?v=0pCPTuA7vmU , que consiste na realização do truque "Open Trumph" de Dani DaOrtiz.

Em Portugal, em 1976 foi fundada a Associação Portuguesa de ilusionismo (API). No Porto, existe a Escola de Magia do Porto, fundado pelos mágicos João Miranda e Gonçalo Gil. Ao longo dos séculos XX e XXI tornaram-se conhecidos do grande público os ilusionistas Conde d'Aguilar (1909-1988), Jolson (1922-1995), sendo que, pela sua maior visibilidade, Luís de Matos é um dos que mais se destaca a nível nacional e também a nível internacional.

Luís de Matos nasceu em 1970 e fez a sua primeira apresentação em público num espetáculo em 1981. Desde essa data nunca mais parou de participar em concursos de magia, em espetáculos, incluindo em programas de televisão. Ao longo da sua carreira arrecadou vários prémios que lhe deram bastante visibilidade. Em 1999, Luís de Matos é distinguido com o título de "Magician Of The Year" pela Hollywood Academy of Magical Arts. Já a International Magicians Society, nomeou-o o "Mágico da Década". (http://luisdematos.com/)

Figura 4: Luís de Matos, ilusionista
(http://www.colombo.pt/whatson/articles/magia-luis-matos-marca-regresso-dos-mestres-da-ilusao/)

Em 1982, nasce no Porto, outro dos ilusionistas com maior relevo a nível nacional e mais ainda, internacional, Helder Guimarães que apenas com 23 anos recebeu o prémio de Campeão mundial de magia com cartas, em Estocolmo. Foi também duplo vencedor do prémio "Magician Of The Year" (em 2011 e 2012), pela Hollywood Academy of Magical Arts.

Figura 5: Helder Guimarães (2014)
(www.dn.pt/pessoas/interior/o-magico-que-da-cartas-no-mundo-e-na-google)

Também Mário Daniel, ilusionista nascido em 1980, se tornou conhecido do grande público pela sua participação e coprodução no programa televisivo "Minutos mágicos". No seu site oficial, http://mariodaniel.com/main/, pode ler-se a sua opinião sobre a magia.

> O mais importante não é só a técnica, mas dar à apresentação um efeito cénico especial, criando um ambiente de cumplicidade com os espetadores, que lhe permita ver o sonho e a poesia implícitos nos gestos e no trabalho do artista. Mexer com os sentimentos do público, através de uma encenação cuidada, pode tornar qualquer truque numa interessante apresentação. (Mário Daniel, Biografia, Formação)

Esta opinião de Mário Daniel sobre a apresentação de truques de magia com recurso a encenações que despertem o interesse do público, é sem dúvida, um dos principais objetivos do Circo Matemático, na medida em que a realização de truques simples, envolvidos por uma encenação cuidada e bem elaborada, podem surtir o efeito desejado na assistência: emoção, curiosidade e interesse por perceber como se realizam aqueles truques e, deste modo, consegue-se fazer a ponte desejada, dos truques à Matemática.

Hoje sabemos que nada de sobrenatural existe por trás de um truque de magia. As apresentações dos ilusionistas, na sua maioria, chamam a atenção pela destreza das mãos, habilidade com ilusão e a criatividade. A rapidez na execução dos truques, a ilusão de ótica e algumas falhas nos sentidos humanos, fazem com que o público se encante e aguce a curiosidade para prestigiar esta arte de aparência impossível. (Oliveira et al., 2013) A encenação e a ilusão criada em cada truque realizado prendem a atenção do público para aquilo que o mágico pretende.

> A arte do ilusionista consiste, antes de tudo, em desviar a atenção da plateia para uma falsa pista, mantendo-a nessa ilusão enquanto durarem as operações ‘enganadoras’, até o máximo possível. Essa camuflagem conduzirá o mágico ao final ideal, em que a solução surge como coisa naturalíssima, inacreditável”. (Furtado, 2008, p. 41)

Dessa maneira, as pessoas, mesmo sabendo que não há nada de sobrenatural, ficam curiosas para desvendar o truque utilizado, prendendo a atenção das mesmas e fazendo com que queiram rever o truque de magia mais do que uma vez.

1.2. A origem do Circo Matemático

Na sequência do projeto familiar os "Matemáticos Silva", que deu em 2008 a origem ao homónimo livro, o Professor Jorge Nuno Silva propôs dar continuidade ao projeto tornando-o algo maior. Para esse efeito, depois de um email enviado em meados de dezembro de 2010, reuniram-se a 11 de janeiro de 2011, Adelaide Carreira e Ana Rute Domingues, docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa, Alexandre Silva, professor do Colégio de S. Tomás, Filomena Carreira, estudante de Matemática, da Universidade de Lisboa, Tiago Hirth, antigo aluno de Matemática da Universidade de Lisboa e Valter Nunes, professor de 3ºciclo. Nasceu desta reunião o conceito base, o nome, o traje e o esquema de espetáculo do Circo Matemático. As informações acerca da génese do Circo Matemático e sobre o núcleo de Lisboa, em particular, foram cedidas por Tiago Hirth, que contribuiu de uma forma muito construtiva para a redação deste capítulo da dissertação.

Jorge Nuno Silva é autor de diversos livros de Matemática Recreativa, entre outros o livro mencionado acima, livro este que consistiu na explicação de alguns efeitos de magia de cartas matemáticos. Para além da sua atividade de divulgação e investigação é presidente e fundador da Associação Ludus e diretor de vários jornais como o Jornal de Mathematica Elementar. Faz também parte da organização de vários congressos e encontros nacionais entre os quais se destaca o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos.

O projeto foi patenteado como "Circo Matemático", pelo professor Jorge Nuno Silva. Muitos dos truques inicialmente utilizados no espetáculo são da sua autoria. Desde então o Circo Matemático é uma secção autónoma da Associação Ludus. Hoje em dia tem dois núcleos de gestão própria vigentes, Lisboa e Aveiro.

Figura 6: Logotipo do *Circo Matemático*
(ludicum.org/ludus)

A Ludus é uma associação sem fins lucrativos que tem por objetivo promover e divulgar a Matemática, nas suas diversas vertentes, nomeadamente a cultural, histórica e recreativa. A finalidade do Circo Matemático é, também, levar a Matemática Recreativa ao público em geral, conseguindo deste modo a divulgação da Matemática no seu todo. (ludicum.org/ludus)

O primeiro espetáculo do Circo Matemático teve lugar a 18 de março de 2011, no ISEL, em Lisboa, no âmbito do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. Nesta apresentação participou também a professora Andreia Hall, orientadora desta dissertação e uma das responsáveis pelo núcleo de Aveiro, do projeto Circo Matemático.

Fotografia 1: Equipa do Circo matemático núcleo de Lisboa

O núcleo do Circo Matemático de Aveiro iniciou a sua atividade em março de 2012, sendo a equipa formada fundamentalmente por professores do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, sob a coordenação da Professora Doutora Andreia Hall e do Professor Doutor Ricardo Pereira.

A equipa do Núcleo de Aveiro é formada por vários elementos, são eles os professores do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Andreia Hall, Ricardo Pereira, Paula Carvalho, Rosália Rodrigues, Rosa Amélia Martins, Isabel Brás, Ana Paula Nolasco, Paulo Almeida, Paolo Vettori, Luís Silva, Sandrina Santos, Sofia Pinheiro e Luís Descalço; o professor João Rodrigues, do Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro e a aluna Inês Costa. Nas imagens que se seguem podem ver-se fotografias da equipa do Núcleo de Aveiro em vários momentos das suas apresentações.

Fotografia 2: Elementos da equipa do núcleo de Aveiro do Circo Matemático

Apesar da gestão individual dos núcleos estes colaboram em várias ocasiões. Destacam-se aqui duas atuações na Conferência Internacional Espaço Matemático em Língua Portuguesa (CiEMeLP), que se realizou em Coimbra de 28 a 31 de outubro de 2015. O espetáculo teve lugar no Café de Santa Cruz, na baixa de Coimbra; e no Recreational Mathematics Colloquium 4 – Gathering 4 Gardner Europe, a 25 de janeiro de 2015, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa.

Fotografia 3: Atuação do Circo Matemático no CiEMeLP, 2015

O Circo Matemático celebrou em 2016 o seu 5º aniversário e promete continuar por muitos mais, tendo em conta a afluência de convites, a ambos os núcleos, para atuações por todo o país.

1.3. Histórico das atuações

De entre todas as atuações do núcleo de Lisboa do Circo Matemático, destacam-se, pela grandeza e visibilidade que foi atribuída a este projeto, as seguintes:

- Com o apoio da Ciência Viva, realizaram a “Volta a Portugal” (ver Fotografia 4) atuando tanto a nível de animação de rua abordando os transeuntes, solicitando, de forma cativante, a sua atenção para os efeitos mágicos ou para problemas curiosos, tais como quebra-cabeças ou pequenos desafios como fazendo um espetáculo de sala nos próprios Centros de Ciência que os convidavam.
- Participaram no ICME, International Congress on Mathematical Education, em Seul, na Coreia, em julho de 2012.
- Foram atuar por duas vezes aos Açores, onde fizeram uma semana de espetáculos na ilha do Pico, a convite da câmara municipal de Lajes.
- Atuaram diversas vezes no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos.
- Em 2012 e em 2014, nos EUA, participaram no encontro bienal “Gathering for Gardner”.
- Ao longo destes anos, têm apresentado o espetáculo regularmente no Museu Nacional de História Natural e da Ciência, tal como participam regularmente em encontros matemáticos como o ProfMat, ENSPM e o Recreational Mathematics Colloquium.

Fotografia 4: “Volta a Portugal” - Carrinha “Pão de forma” usada na viagem

Ao longo destes anos, a equipa do núcleo de Lisboa atuou, em média, em cerca de 50 espetáculos por ano, em escolas, além das participações em feiras e festivais. Como exemplo disso, a equipa participou no “Festival Andanças”, onde havia um horário definido para realização de workshops de magia, e no restante tempo, faziam as suas habilidades de forma espontânea mediante a recetividade e interesse do público que se encontrava a circular na feira. Até janeiro de 2016, o núcleo de Lisboa do Circo Matemático conta com cerca de 170 participações, o que corresponde a um número bem maior de atuações (cerca de 250), pois em muitos casos uma participação num determinado evento representa mais do que uma atuação. Pode-se dizer que através destas diversas iniciativas nas escolas, o núcleo de Lisboa do Circo Matemático chegou a cerca de 5000 alunos por ano, o que totaliza cerca de 25 mil alunos que assistiram aos espetáculos desde o início da atividade do Circo.

A primeira atuação da equipa do Núcleo de Aveiro do Circo Matemático realizou-se no Colégio de Bustos, a 8 de março de 2012. O segundo espetáculo foi realizado no Encontro Anual de Antigos Alunos do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, em 2012. Desde essa data foram muitos os espetáculos apresentados. Decorreram em escolas do 1º Ciclo ao Ensino Secundário, bem como, na Universidade de Aveiro, nomeadamente na Academia de Verão, em Centros de Ciência Viva e em Congressos Científicos. Em anexo pode consultar-se uma tabela onde estão registados todos os espetáculos realizados pelo núcleo de Aveiro. Até à data o *Circo Matemático* de Aveiro já realizou cerca de 100 sessões, destinadas a cerca de 11 mil alunos.

Desde a sua primeira atuação em 2012, o Núcleo de Aveiro do Circo Matemático tem marcado todos os anos a sua presença em três eventos da Universidade de Aveiro, são eles, as Competições PMatE, a Academia de Verão e a Semana da Ciência e Tecnologia, onde contam já quatro participações.

Os convites para apresentação do espetáculo nas escolas sucedem-se, e foram vários os locais onde já o fizeram, nomeadamente, Águeda, Aveiro, Coimbra, Espinho, Gafanha da Nazaré, Gaia, Gondomar, Guimarães, Matosinhos, Oliveira do Bairro, Paços de Ferreira, Pampilhosa da Serra, Porto, Santa Maria da Feira, Tondela, Vieira do Minho e Viseu, sendo que, em alguns casos, a sua participação já se repetiu, o que demonstra o agrado e a adesão a este projeto.

Ainda na Universidade de Aveiro, o Circo Matemático foi apresentado a professores e investigadores, no evento "Hands on Science" e a alunos da Licenciatura em Matemática, no evento denominado por "Dmat – Tutoria".

O Núcleo de Aveiro do Circo Matemático apresentou também o seu espetáculo no Museu da Cidade de Aveiro, no Centro de Ciência Viva, em Aveiro e na Associação de Promoção Social de Fornos de Algodres.

Como já anteriormente foi referido, esta equipa participou em duas conferências: Conferência Internacional Espaço Matemático em Língua Portuguesa (CiEMeLP), em outubro de 2015 e no Recreational Mathematics Colloquium 4 – Gathering 4 Gardner Europe, em janeiro de 2015, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa.

Uma das grandes vantagens da existência de dois núcleos a nível nacional, localizados em zonas geográficas distintas, prende-se com a facilidade de realização de espetáculos que rapidamente cobrem todo o território nacional, podendo chegar a todas as escolas do país.

Esta dissertação tem por base, fundamentalmente a experiência acumulada pela equipa de Aveiro, e em particular pela professora Andreia Hall e pelo professor Ricardo Pereira, que prontamente se disponibilizaram para fornecer toda a informação necessária quer para a apresentação dos truques, quer nas orientações para a realização de pesquisa de novos truques, quer no contacto criado com elementos ligados ou não ao Circo Matemático, os quais foram fundamentais para a redação deste texto.

1.4. Os espetáculos

O Circo Matemático desenvolve atividades para alunos das escolas de qualquer nível de ensino, adequadas a cada grupo. Para alunos mais velhos, os espetáculos podem ser dirigidos a grupos de mais de 100 pessoas. Para crianças, privilegiam a interação com os alunos, optando por atuar para grupos mais pequenos, sendo que para um grupo de alunos do pré-escolar não é aconselhável mais de 25 alunos, os quais devem estar sempre acompanhados do(a) educador(a). A duração das sessões varia entre 45 e 90 minutos.

A equipa de Lisboa referiu já ter atuado para um público de 800 pessoas, no entanto, ressalva o facto da localização, da envolvência, da faixa etária, das motivações e interesses do público ao qual se destina o espetáculo é decisivo para o seu sucesso. A equipa de Aveiro atuou no máximo para 500 alunos.

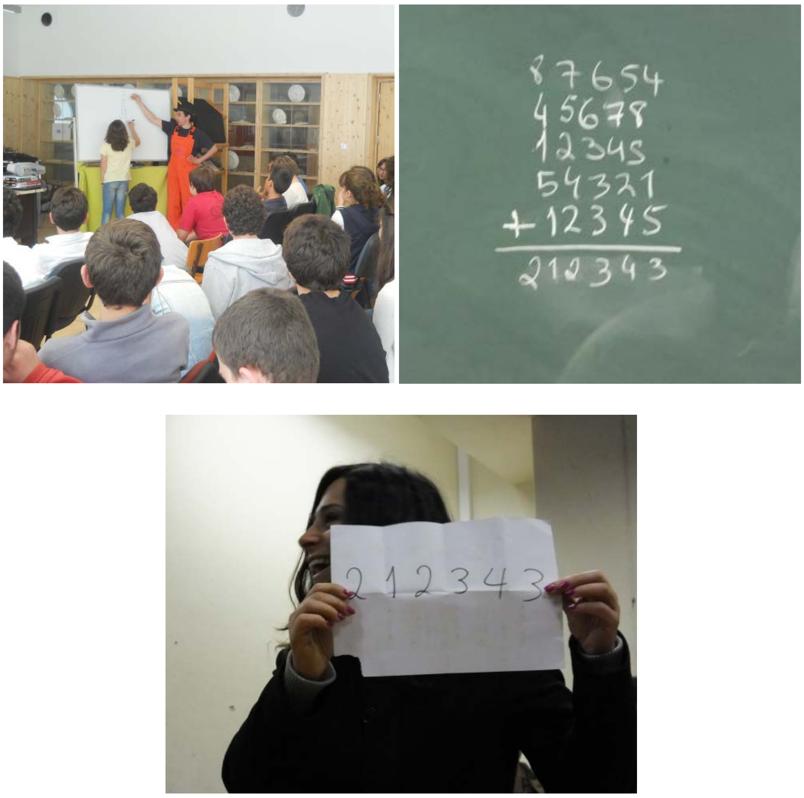
Quanto à indumentária utilizada nos espetáculos, os elementos da equipa apresentam-se usando jardineiras cor de laranja e adereços, tais como, perucas, chapéus, óculos, pins, etc. A maioria dos materiais utilizados nos truques de ilusionismo são produzidos pelos próprios elementos das respetivas equipas.

Um espetáculo de *Circo Matemático* tem vários intervenientes. O Apresentador que, como é óbvio, é quem apresenta o espetáculo e faz a interligação entre os vários momentos e truques. Por vezes, quando o truque assim o exige, o Apresentador, torna-se o Ajudante do mágico. Durante o espetáculo atuam, entre outros, o Mágico e/ou o Mentalista que realizam truques que exigem concentração e um processo de adivinhação. O Contorcionista realiza truques que implicam o movimento por parte dos participantes, bem como a manipulação de materiais (cordas, papel, tecidos, etc.). A maioria dos seus truques está relacionada com a Topologia. Para o apoio ao nível do som e da imagem existe um DJ. Falta ainda referir o Palhaço que tem um papel bastante relevante, interativo e interventivo durante todo o espetáculo. A sua interação com o público é muito grande e decisiva no sucesso da apresentação do espetáculo.

Os truques que constituem um espetáculo estão agrupados em quatro grandes grupos e estão descritos em pormenor nos capítulos que se seguem, nas páginas indicadas na última coluna da tabela.

- Truques com números

Nas fotografias que se seguem (Fotografia 5) podem ver-se três etapas da apresentação do truque “Palavra do livro”, que se encontra descrito na página 76. Como este, os outros truques com números apresentados nesta dissertação baseiam-se no cálculo mental ou com recurso à calculadora e nas propriedades dos números. Em todos os truques é realizada uma adequada encenação que capta a atenção do espetador, levando-o a não reparar nos conceitos matemáticos usados, e que são, na grande maioria dos casos, do seu conhecimento.



Fotografia 5: Truque “Palavra do Livro”

- Truques com cartas

Nas fotografias que se seguem (Fotografia 6) pode-se ver o Mágico e o Apresentador a realizar o truque “Cinco Cartas”, que se encontra descrito na página 95. Note-se que estão a ser usadas cartas de tamanho “king size”, que corresponde a cartas de tamanho A5, ou A4, para que todo o público possa visualizar o truque, mesmo estando distanciados do palco. Este tipo de cartas é usado noutros truques.

Fotografia 6: Truque “Cinco cartas”

- Truques Topológicos

Uma grande variedade de truques de magia pode ser designada por “Truques Topológicos” por parecerem violar leis topológicas elementares. O campo de ação da magia topológica restringe-se quase por completo a materiais flexíveis tais como o papel, tecido, corda, fitas de borracha, entre outros.

Para se poder afirmar que estamos perante truques topológicos temos que ter a garantia que as propriedades não variam durante a transformação contínua do objeto utilizado no respetivo truque. A topologia tem a ver com o que acontece às formas quando estas se esticam, torcem ou emaranham. Se se esticar e dobrar uma forma para fazer outra, então as duas formas dizem-se topologicamente equivalentes. Os truques apresentados nesta dissertação são exemplos disso mesmo. (ver secção 2.9.3 - Formas topologicamente equivalentes, na Página 56)

Na figura seguinte (Fotografia 7) pode ver-se a apresentação do truque “Cordas Enlaçadas”, que se encontra descrito na página 133.

Fotografia 7: Truque “Cordas Enlaçadas”

Já na figura seguinte (Fotografia 8) pode ver-se a alegria de um aluno que conseguiu realizar o truque “Braços Cruzados”, este truque pode ser consultado na página 126.

Fotografia 8: Truque “Braços cruzados”

- Truques do Palhaço

O Palhaço intervém com truques, com jogos, com anedotas matemáticas e cria ilusões que confundem os participantes e que dificultam a perceção do truque propriamente dito. O Palhaço consegue surpreender de duas formas, ou não conseguindo fazer aquilo que qualquer pessoa obviamente consegue, ou conseguindo fazer algo que o público não espera que ele consiga.

Ele também é responsável por alguns dos Truques Topológicos.

Fotografia 9: Truque “Dia e mês do aniversário do palhaço”

Na Tabela 1 (ver páginas 21 a 23) pretende-se resumir informação relevante sobre os truques que são contemplados nos espetáculos e quais os intervenientes que participam em cada um deles. A tabela indica também algumas sugestões de músicas que podem servir de banda sonora aos vários truques, bem como a indicação da página onde se pode consultar cada um dos truques descritos nesta dissertação.

É importante realçar que os truques referidos nessa tabela são todos eles utilizados na formação dos programas do Circo Matemático apresentados nesta dissertação. Na construção dos programas houve o cuidado de diversificar a tipologia dos truques usados, tendo em conta a faixa etária do público-alvo, com o objetivo de tornar o espetáculo dinâmico e com ritmo, criando momentos de suspense, de surpresa, de entusiasmo, de curiosidade, mantendo sempre a boa disposição. Todos os artistas contribuem para que o espetáculo seja divertido, mas, sem dúvida, este papel cabe maioritariamente ao Palhaço, que surge em vários momentos ao longo do espetáculo, contando anedotas, histórias e apresentando truques com os quais os alunos, de um modo geral se identificam, pelos erros matemáticos aí apresentados ou pelo desempenho inesperado do Palhaço. Durante todo os espetáculos, são garantidos vários momentos de suspense, de espanto, de boa disposição e de grande interação entre os artistas e o público.

Fernando Blasco defende que para que um espetáculo seja bem-sucedido, o Mágico deve escolher o seu melhor truque e o segundo melhor. O segundo melhor truque deverá ser usado no início de todo o espetáculo, e o melhor de todos deve ser guardado para o grande final. Quando se apresenta um espetáculo de Magia Matemática, é de todo o interesse que se consiga obter um equilíbrio entre o que faz parte do show e da própria encenação e o que é Matemática. (Blasco, 2011)

Fundamental será também respeitar algumas regras básicas que têm de ser utilizadas em palco: em cada truque, apenas devem estar em palco os seus intervenientes; cada interveniente deve ter o cuidado de falar sempre voltado para o público; deve garantir-se a visibilidade, por parte do público, de tudo o que está a ser feito em palco, nomeadamente aquando da participação dos voluntários do público; deve haver o cuidado de ao utilizar banda sonora durante os truques, esta não se sobreponha às vozes dos intervenientes; ajustar todos os aspetos referidos atrás ao número de espetadores em cada espetáculo.

Nos espetáculos de magia matemática, é necessário decidir se a explicação dos efeitos que estão a ser realizados serão, ou não, desvendados. Não se pode esquecer que a magia vive do aguçar da curiosidade e da procura da solução para vários enigmas. Contudo, e tendo sempre presente que desvendar o segredo que está por trás de cada truque pode quebrar a magia, no caso dos truques matemáticos, existem inúmeras vantagens de o fazer. No entanto, deve-se deixar o espectador assimilar o que lhe foi apresentado, para que ele próprio sinta o desfio de tentar encontrar a solução. E não é este princípio pelo qual nos devemos reger em tudo o que diz respeito à Matemática?

Tabelas com Truques, respetivos intervenientes e sugestão de banda sonora

	Intervenientes / Identificação do Truque	Apresentador /Ajudante	Mágico	Mentalista	Contorcionista	Palhaço	DJ	Nº de Vol. Público	Músicas	Página
3. Truques com Números	3.1. Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*	X		X			X	1	Música de transe	58
	3.2. Adivinhar a soma de n termos de *Fibonacci*	X		X			X	1	Música de transe	61
	3.3. Dia e mês do aniversário	X	X				X	1	"Parabéns"	64
	3.4. Adivinhar animal preferido	X	X				X	1	"O som dos animais / animal sounds / el sonido de los animales"	68
	3.5. Adivinhar a data de nascimento			X			X	1	"Parabéns"	71
	3.6. Adivinhar o algarismo que sobra			X			X	1	"Jeopardy Theme"	74
	3.7. Palavra do livro			X			X	1	Banda sonora do filme associado ao livro.	75
	3.8. Adivinhar o pensamento coletivo			X			X		"Guiness World Record" ou "Hatha Yoga Music"	79
	3.9. Cenário com Prémios	X		X		X		1	Música de um concurso televisivo	87
	3.10. Dados empilhados	X		x			X	1	Efeito sonoro - Rufar de tambores	89
	3.11. Adivinhar o total			X			X	1	"Jeopardy Theme"	91

	Intervenientes / Identificação do Truque	Apresentador /Ajudante	Mágico	Mentalista	Contorcionista	Palhaço	DJ	Nº de Vol. Público	Músicas	Página
4. Truques com Cartas	4.1. Cinco cartas	X	X				X	1 a 5	"Somebody That I Used To Know" (Gotye)	95
	4.2. Cartas Baralhadas		X				X	2	"Sexta-feira (Emprego Bom Já)" (Boss AC)	100
	4.3. Código do aloquete			X			X	4	"Somebody That I Used To Know" (Gotye)	102
	4.4. A soma é 15!			X				3		104
	4.5. Quadrado Mágico Diabólico			X			X	1	"Star Wars (Guerra nas estrelas)" (trilha sonora, OFES, maestro adjunto: Leonardo David)	107
	4.6. A herança		X				X	3	"Jeopardy Theme"	110
	4.7. Sou realmente um génio		X					1		112
	4.8. A prova dos nove			X				1		114
	4.9. A bola de cristal		X				X	1	Temas de meditação	116
	4.10. Encontrar o amor		X			X	X	Todos	Gladiator Theme – "Now We Are Free" (Hans Zimmer & Lisa Gerrard)	118
	4.11. A vermelhinha			X				Todos		123

	Intervenientes / Identificação do Truque	Apresentador /Ajudante	Mágico	Mentalista	Contorcionista	Palhaço	DJ	Nº de Vol. Público	Músicas	Página
5. Truques com Topologia	5.1.Braços cruzados				X	X		1		126
	5.2. Folha ao contrário				X	X	X	2	Músicas de Touradas	128
	5.3. Cordas enlaçadas				X	X	X	2	"Benny Hill Show"	133
	5.4. Quebra cabeça do anel				X	X	X	2	Marcha nupcial	136
	5.5. Colete refletor				X	X	X	1	Sons de carro, acidente e ambulância e "Fanfare Ciocarlia – Foxtrot"	139
	5.6. Buraco na folha de papel				X	X	X	5 ou 6	"Loved by a women" ("O carteiro de Pablo Neruda – Il Postino")	141
	5.7. Recortes em argolas simples ou Fitas de *Möbius*				X	OPCIONAL	X	6	"Música de circo-Comédia" (Lalo Duarte) *Music and sound México*	145
6. Truques do Palhaço	6.1. Mês de aniversário	X	X			X	X	1	"Circus Theme Music" (Christopher Lambert)	154
	6.2. Adivinhar animal preferido	X	X			X	X	1		156
	6.3. Contas erradas					X	X	1	"Dumbo Circus Parade" (Walt Disney Movie)	156
	6.4. 35 camelos	X				X	X			160
	6.5. História dos 4 reinos		X			X	X			164
	6.6. Truque da Multiplicação	X				X	X	1	Estas músicas podem funcionar como banda sonora de vários momentos do espetáculo.	166
	6.7. Lista de Anedotas					X	X			167
	6.8. Noticiário	X				X	X		Música de abertura de um Noticiário	170

Tabela 1: Truques, respetivos intervenientes e banda sonora

Capítulo 2

2. Fundamentos Matemáticos

2.1. Introdução

Este capítulo, como o próprio nome indica, contém os fundamentos matemáticos que estão na base da execução de diversos truques descritos ao longo desta dissertação. Este capítulo foi pensado essencialmente no leitor que se depara com termos, conceitos, expressões que não lhe são familiares, e deste modo, pode aprofundar os seus conhecimentos matemáticos.

Assim, a secção que se segue diz respeito à Sucessão de *Fibonacci*, onde para além de haver uma explicação teórica da própria sucessão, são apresentadas aplicações práticas da mesma. Em seguida, são desenvolvidas as secções dos Sistemas de Numeração, Congruência Modular e Critérios de Divisibilidade, onde são apresentadas algumas definições e exemplos da sua aplicação. Segue-se uma secção dedicada ao tipo de baralhamento de cartas usado nos truques que se apresentam posteriormente. Ao longo da apresentação e descrição dos truques poder-se-á encontrar referências a dois princípios: Princípio do Pombal e Princípio de *Gilbreath*. Estes princípios estão também aqui apresentados, com recurso a alguns exemplos de aplicação. Posteriormente, encontra-se a descrição e algumas aplicações dos Quadrados Latinos e dos Quadrados Mágicos. Por fim, surge a secção associada à Topologia, nomeadamente, o que se refere à Fita de *Möbius*.

2.2. Sucessão de *Fibonacci*

2.2.1. O que são os números de *Fibonacci*?

A sucessão de *Fibonacci*, ou sequência de *Fibonacci*, é uma sucessão de números naturais, na qual os primeiros dois termos são 1, e cada termo subsequente corresponde à soma dos dois precedentes. Também se pode encontrar em alguns manuais a definição da sucessão de *Fibonacci* como uma sucessão de números naturais, na qual os primeiros dois termos são respetivamente, 0 e 1. Nesta dissertação optou-se pela primeira definição.

A sucessão tem o nome do matemático pisano do século XIII Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, e os seus termos são chamados números de *Fibonacci*. Os números de *Fibonacci* são, portanto, os números que compõem a seguinte sucessão de números inteiros:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Em termos matemáticos, a sucessão é definida recursivamente pela fórmula abaixo:

$$F(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ 1, & se\ n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & se\ n > 2 \end{cases}$$

A sucessão de *Fibonacci* tem várias aplicações, nomeadamente nas configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores, na forma do cone do abacaxi, no número de pétalas de flores, etc.

No truque "Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*" (ver página 58) é utilizada a Sucessão Generalizada de *Fibonacci*, a partir do momento em que os primeiros dois termos são quaisquer números naturais, não obrigatoriamente iguais a 1. Contudo, a base de construção desta sucessão é a mesma da anterior, isto é, a partir do terceiro termo, cada termo é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Também no truque "Adivinhar a soma de n termos de Fibonacci" é utilizada a sucessão generalizada de *Fibonacci*.

Sejam $a, b \in \mathbb{N}_0$, os dois primeiros termos da sucessão generalizada de *Fibonacci*. O terceiro termo é obtido pela soma dos dois primeiros termos, obtendo-se $a + b$. A partir daqui adiciona-se a soma obtida com o termo anterior. Obtém-se, deste modo, os termos da sucessão generalizada de *Fibonacci*. No quadro que se segue podem ver-se os dez primeiros termos desta sucessão.

1º termo	a
2º termo	b
3º termo	$a+b$
4º termo	$b+(a+b)=a+2b$
5º termo	$(a+b)+(a+2b)=2a+3b$
6º termo	$(a+2b)+(2a+3b)=3a+5b$
7º termo	$(2a+3b)+(3a+5b)=5a+8b$
8º termo	$(3a+5b)+(5a+8b)=8a+13b$
9º termo	$(5a+8b)+(8a+13b)=13a+21b$
10º termo	$(8a+13b)+(13a+21b)=21a+34b$

Tabela 2: Sucessão Generalizada de *Fibonacci* (primeiros 10 termos)

2.2.2. Origem

Na Europa Ocidental, a sucessão de *Fibonacci* apareceu pela primeira vez no livro Liber Abaci (1202) de Leonardo de Pisa, conhecido como *Fibonacci*, embora ela já tivesse sido descrita por matemáticos indianos (Singh, 1985).

No Liber Abaci, a sucessão começa com $F_1 = 1$, e $F_2 = 1$, tal como apresentado inicialmente. Um dos problemas referidos nessa obra é o problema da reprodução dos coelhos que esteve na origem da famosa sucessão. *Fibonacci* considerou o crescimento de uma população idealizada (não realista biologicamente) de coelhos.

Os números da sucessão de *Fibonacci* descrevem o número de casais na população de coelhos depois de n meses se for suposto que:

• no primeiro mês existe apenas um casal;

• os casais amadurecem sexualmente (e reproduzem-se) apenas a partir do segundo mês de vida;

• não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;

• todos os meses, cada casal fértil acasala e dá à luz um novo casal, ao fim de 1 mês;

• os coelhos nunca morrem.

Na figura que se segue pode-se observar o resultado da reprodução dos coelhos durante sete meses, a partir do início do estudo.

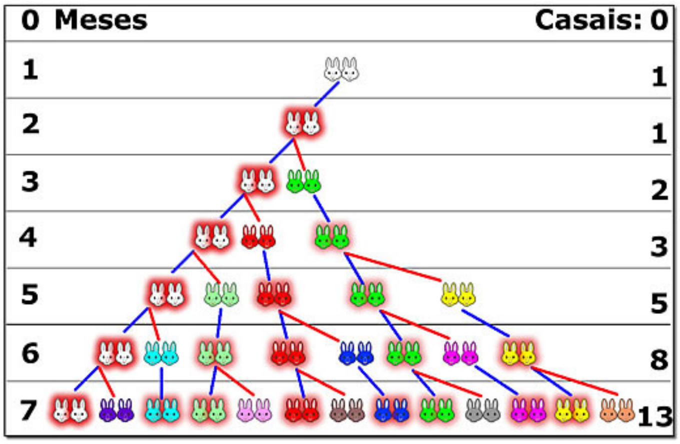


Figura 7: Problema dos coelhos
(http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/)

Caso se pretenda calcular diretamente um determinado termo da sucessão de *Fibonacci* podemos utilizar a expressão seguinte:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, n \in \mathbb{N}$$

A demonstração pode ser consultada na dissertação de mestrado intitulada "Magia Matemática com Números" (Ilda Bastos, 2015), nas páginas 7 e 8.

2.2.3. Número de Ouro

Considerando a razão entre dois termos consecutivos da sucessão de *Fibonacci*, a sucessão assim obtida converge para um número irracional conhecido por Número de Ouro.

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} \rightarrow \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$$

Este número tem fascinado muita gente desde a Antiguidade Clássica até aos nossos dias.

A razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular é o Número de Ouro, como se pode observar na Figura 8.

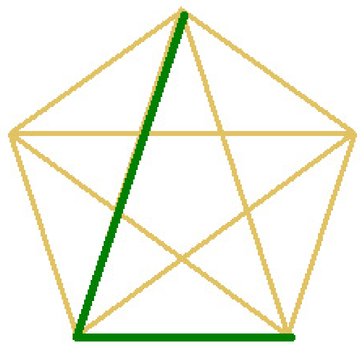


Figura 8: Pentágono regular
(http://stockstillegfosdick.blogspot.pt/2010/05/numero-de-ouro.html)

O Número de Ouro foi estudado pelos Gregos num contexto geométrico. Euclides (Elementos II,11 e VI,30) dividiu um segmento de reta AB em duas partes tais que:

$$|AP|:|PB| = |AB|:|AP|$$

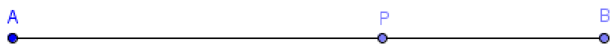


Figura 9: Segmento de reta $[\boldsymbol{AB}]$

Esta razão é o Número de Ouro (ϕ).

Desde tempos remotos que o Número de Ouro é aplicado na arte. O Retângulo de Ouro (Figura 10) é reconhecido como sendo a forma visualmente mais equilibrada e harmoniosa. À razão entre os seus lados dá-se também o nome de Número de Ouro.

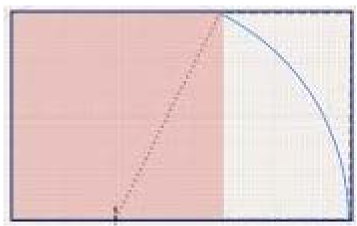


Figura 10: Retângulo de Ouro
(http://portillodesign.com.br/design/o-numero-de-ouro-e-sua-aplicacao-em-design.html)

2.2.4. Aplicações

São diversas as aplicações da sucessão de *Fibonacci*. Os números de *Fibonacci* correspondem também à soma das diagonais do Triângulo de Pascal, como se pode ver na figura que se segue (Figura 11).

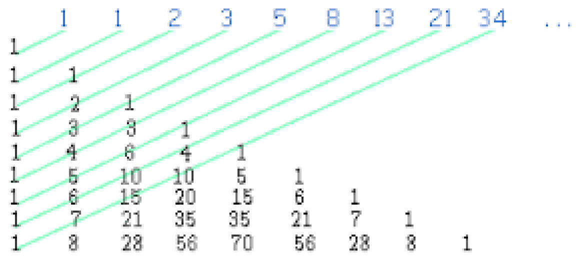


Figura 11: Sequência de *Fibonacci* na soma das diagonais do Triângulo de Pascal

Um uso interessante da sucessão de *Fibonacci* é na conversão de milhas para quilómetros. Por exemplo, para saber aproximadamente a quantos quilómetros correspondem 5 milhas, considera-se o número de *Fibonacci* correspondendo ao número de milhas (5) o número seguinte (8). Assim, 5 milhas são aproximadamente 8 quilómetros. Este método funciona porque, por coincidência, o fator de conversão entre milhas e quilómetros (1.609) é próximo de ϕ (≈ 1.618), correspondente ao Número de Ouro.

A sequência de *Fibonacci* está ligada à natureza. Estes números são facilmente encontrados no arranjo de folhas do ramo de uma planta, nas copas das árvores ou até mesmo no número de pétalas das flores. As sementes das flores, frutos e, de forma particularmente interessante, as pinhas, trazem na sua forma natural esta sequência, disposta em espiral.

Figura 12: Bromélia

Este tipo de espiral também pode ser identificado na concha do Nautilus marinho.

Figura 13: ***Nautilus Marinho***

Na espiral formada pela folha de uma bromélia, pode ser percebida a sucessão de *Fibonacci*, através da composição de quadrados com arestas de medidas proporcionais aos elementos da sequência, por exemplo: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… , que tendem para a Razão de Ouro.

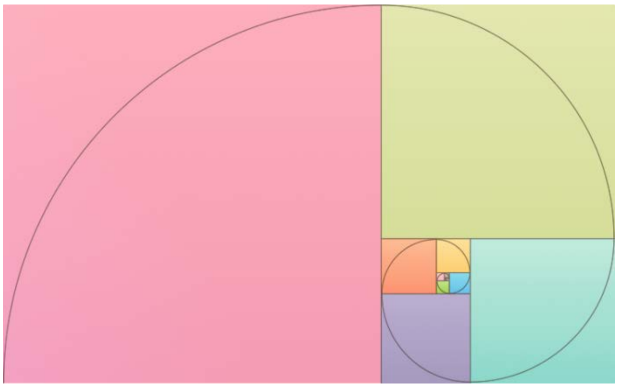


Figura 14: Espiral construída a partir da sucessão de ***Fibonacci***
(http://portillodesign.com.br/design/o-numero-de-ouro-e-sua-aplicacao-em-design.html)

Muitos artistas usaram o Número de Ouro (ou Proporção Áurea) nos seus trabalhos. Um exemplo disso foi *Da Vinci*, que chamava ao Número de Ouro, Divina Proporção. Uma dessas aplicações pode ser identificada na pintura da Mona Lisa, onde é possível observar a Proporção Áurea em várias situações, conforme mostra a Figura 14. Esta imagem resulta do trabalho de investigação sobre a aplicação do Número de Ouro na natureza, na arte e na arquitetura, realizado por alunos numa aula, que pode ser encontrado no Portal do Professor, Brasil, 2016, da autoria de Guilherme Erwin Hartung.

O Número de Ouro traduz a proporção geométrica mais conhecida e usada na pintura, escultura e arquitetura clássicas, renascentistas e pós-modernistas que se baseia no seguinte princípio: "*seccionar um segmento de reta de tal forma que a parte menor esteja para a maior como esta está para o todo*".

Por exemplo, na pintura de Leonard Da Vinci, Mona Lisa, ao construir um retângulo em torno do seu rosto, verifica-se que este possui a Proporção Áurea. Podemos também subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e ter de novo a Proporção

Áurea. Podemos continuar a explorar esta proporção em várias outras partes do corpo. (ver Figura 15)

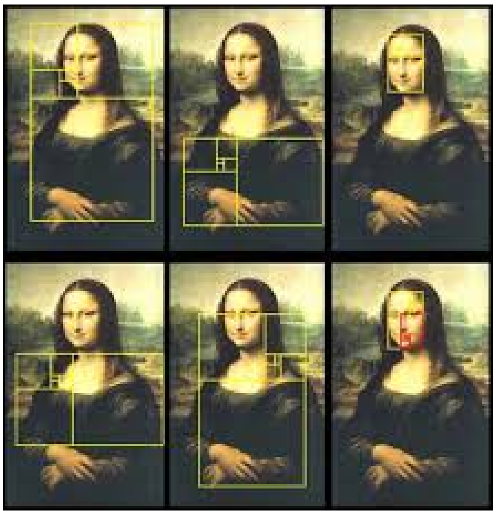


Figura 15: Aplicação do Número de Ouro
(portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24829)

2.2.5. Curiosidades sobre Fibonacci

Leonard Fibonacci nasceu em Itália, na cidade de Pisa, no ano de 1170 e morreu na mesma cidade no ano de 1250. *Fibonacci* era também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo. Foi considerado um dos melhores matemáticos da idade média, sendo que foi o primeiro de tantos outros da sua época a ter esse título. Além de ser conhecido pela sua sequência, foi Fibonacci que introduziu os números arábicos, incluindo o zero, na Europa.

Escreveu diversos livros, Liber Abaci (1202); Practica Geometriae (1220); Liber quadratorum (1225); entre outros.

Figura 16: *Leonard Fibonacci*
(https://www.fibonicci.com/fibonacci/)

2.3. Sistemas de Numeração

Nos truques “Dia e mês do aniversário”, “Adivinhar o animal preferido” e “Cinco cartas” foi necessário recorrer-se ao sistema de numeração de base 2. Ao longo desta secção vão poder-se encontrar alguns resultados importantes sobres sistemas de numeração de base b e exemplos da sua aplicação, bem como, do modo de conversão entre sistemas de numeração de bases diferentes, nomeadamente da base decimal (base 10) para a base binária (base 2). (Rodrigues, 2015)

2.3.1. Definições

Definição 2.1: Um sistema de numeração é um conjunto de símbolos e regras que possibilitam a escrita de números.

Note-se que um número é um objeto matemático utilizado para fins de quantificação.

Os sistemas de numeração podem classificar-se em:

- Não posicionais;
- Posicionais.

Definição 2.2: Um sistema de numeração diz-se posicional quando o valor dos símbolos utilizados não depende apenas da sua forma mas também da posição que ocupam no número.

Exemplo 1

No sistema de numeração Indo-árabe (posicional), no numeral 582, o símbolo 5, pela sua posição, representa quinhentas unidades. Em contrapartida, no sistema de numeração romano (não posicional), o número cinco, representado pela letra V, tem o mesmo valor nas expressões VII, V ou XV.

2.3.2. Sistema de numeração de base b

Quando um sistema de numeração assenta num processo de agrupamento com dimensão fixa dizemos que esse sistema possui uma base.

Definição 2.3: A base de um sistema de numeração posicional é a quantidade de símbolos ou dígitos (algarismos) distintos utilizados para representar qualquer quantidade, nesse sistema de numeração.

Definição 2.4: Numa base posicional, a ordem de um algarismo (ou símbolo) é a posição que ocupa no número, crescendo da direita para a esquerda e começando em zero, se o número for inteiro.

Se o número tiver parte decimal, o algarismo que está imediatamente à esquerda da vírgula é de ordem zero.

No sistema decimal, são utilizados dez símbolos diferentes ou algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. O valor de cada um desses algarismos depende da posição que ocupa no número.

Teorema 2.1: Quaisquer que sejam $a \in \mathbb{Z}^+$ e $b \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, existem inteiros únicos $r_0, r_1, \dots, r_n$ tais que

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_2 b^2 + r_1 b^1 + r_0 b^0,$$

$r_n \neq 0 \;\; e \;\; 0 \leq r_i < b$ para $0 \leq i \leq n$.

A demonstração deste corolário fornece um algoritmo que permite escrever qualquer número inteiro a numa base b. A demonstração pode ser consultada na dissertação de mestrado "Magia matemática com cartas" (Rodrigues, 2015).

Exemplo 2

No número 2541, cada algarismo tem um valor em função da sua posição:

Ordem das unidades de milhar	Ordem das centenas	Ordem das dezenas	Ordem das unidades
10^3	10^2	10^1	10^0
2	5	4	1

Assim, $2541 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 1$.

Esta representação designa-se por representação polinomial ou notação expandida do número e é única.

A unicidade da representação polinomial de um número a resulta da seguinte proposição e corolário:

Proposição 2.1: (Divisão euclidiana de inteiros) Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, existem inteiros q e $r \in \mathbb{N}$ únicos tais que:

$$a = qb + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < b.$$

A q chamamos quociente e a r resto da divisão inteira de a por b.

A demonstração pode ser consultada em "Treze viagens pelo mundo da Matemática" (Correia de Sá, 2010).

Esta unicidade não se limita à base 10 e é válida para qualquer base.

Corolário 2.1: Qualquer número inteiro a pode ser escrito numa base de numeração b, com b inteiro maior que 1, utilizando uma sequência de algarismos $r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0$ com o significado

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b^1 + r_0 = \sum_{i=0}^{n} r_i b^i$$

com $r_i \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$; $i = 0,1, \dots, n$ e $r_n \neq 0$.

2.3.3. Conversão entre bases

O sistema decimal (base 10) é sem dúvida o sistema de numeração mais utilizado. No entanto, no mundo da computação, por exemplo, os sistemas digitais recorrem a outros sistemas de numeração como os sistemas binário (base 2), octal (base 8) e hexadecimal (base 16). Uma vez que o sistema de codificação utilizado nos truques com cartas descritos nesta dissertação é o sistema binário, será dado destaque à conversão entre o sistema decimal e o sistema binário. Em todo o caso a explicação da conversão entre bases será dada recorrendo a uma forma generalizada de conversão entre o sistema decimal e um sistema de base b.

Conversão do sistema decimal para o sistema de base b

A conversão de números escritos no sistema decimal para a base b pode ser feita de acordo com o seguinte procedimento:

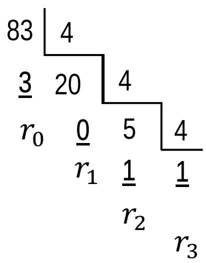
1) Efetuar divisões sucessivas por b até obter um quociente inferior a b;

2) Escrever ordenadamente o último quociente e todos os restos obtidos por ordem inversa.

Este procedimento tem por base o algoritmo da demonstração do corolário 2.1 e está ilustrado no exemplo seguinte.

Exemplo 3

$83_{(10)} = 1103_{(4)}$. De facto



Conversão do sistema de base b para o sistema decimal

A conversão de um número escrito na base b para a base decimal consiste em:

1) Multiplicar cada algarismo do número pela potência de base b e expoente correspondente à sua ordem;
2) Adicionar os produtos obtidos.

Exemplo 4

$11001_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 8 + 1 = 25_{(10)}$

De um modo geral, para converter um número escrito no sistema de numeração de base b para a base b' (com $b \neq 10 \neq b'$) o processo utilizado consiste em converter da base b dada para a base decimal e depois da base decimal para a base b' pedida, como se pode ver no exemplo que se segue.

Exemplo 5

Vamos supor que se pretende converter o número $10132_{(4)}$ para o sistema binário.

Então, escrevemos que:

$10132_{(4)} = 1 \times 4^4 + 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 256 + 16 + 12 + 2 = 286_{(10)}$.

286	2							
0	143	2						
	1	71	2					
		1	35	2				
			1	17	2			
				1	8	2		
					0	4	2	
						0	2	2
							0	1

Por sua vez, $286_{(10)} = 100011110_{(2)}$.

Logo, $10132_{(4)} = 100011110_{(2)}$

2.4. Critérios de Divisibilidade no Sistema Decimal

Para se poder apresentar alguns dos resultados sobre os Critérios de Divisibilidade é importante ter algumas noções sobre Congruência Modular. Assim, em primeiro lugar serão apresentadas definições básicas sobre este tema. (Rodrigues, 2015)

Definição 2.5: Dados dois números inteiros quaisquer, a e b, diz-se que r é o resto da divisão inteira de a por b, e escreve-se

$$r = a \; mod \; b, \text{ se } 0 \leq r < |b| \text{ e } a = qb + r \text{, para algum inteiro } q.$$

No caso particular em que $r = 0$, diz-se que a é divisível por b.

Exemplo 11

1) $27 \bmod 5 = 2$ uma vez que $27 = 5 \times 5 + 2$.

2) $27 \bmod (-4) = 3$ uma vez que $27 = (-4) \times (-6) + 3$.

3) $-27 \bmod 7 = 1$ uma vez que $-27 = 7 \times (-4) + 1$.

Definição 2.6: Seja $n \in \mathbb{N}$. Dois inteiros a e b dizem-se congruentes módulo n e escrevemos

$$a \equiv_n b \quad \text{ou} \quad a \equiv b \; (mod \; n)$$

se tiverem o mesmo resto na divisão por n , isto é, $a \; mod \; n = b \; mod \; n$, ou equivalentemente, se $(a - b)$ é um múltiplo de n.

Observação: Para $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Z}$, os números congruentes com a, módulo n, são os inteiros da forma

$$a + kn, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 6

Sabemos que $10 \equiv 7 \pmod{3}$ (lê-se 10 é congruente com 7 módulo 3) pois 10 dividido por 3 dá resto 1 e 7 dividido por 3 também dá resto 1, ou podemos dizer que $(10 - 7) = 3$ que é múltiplo de 3.

Definição 2.7: Dado um número inteiro positivo m, chama-se Critério de Divisibilidade por m, à proposição que permite calcular, por meio de um processo rápido, o resto da divisão por m de um inteiro positivo a dada a sua representação decimal.

Proposição 2.2: Sejam a e $m \in \mathbb{N}$ e $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$.

Se $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ forem os restos da divisão inteira de, respetivamente, $10, 10^2, \ldots, 10^{n-1}, 10^n$ por m, então

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 \ (mod\ m).$$

A demonstração desta proposição pode ser consultada em "Matemática discreta", do Departamento de Matemática da Universidade do Minho. (Smith, 2009)

Nota: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ não representa um produto de fatores, representa sim, um número em que $a_n, n \in \mathbb{N}_0$ são os algarismos, correspondentes a cada uma das classes, que formam o número. Nos truques "Adivinhar a data de nascimento" (ver página 71), "Adivinhar o algarismo que sobra" (ver página 74) e "Palavra do livro" (ver página 76) também se utiliza esta notação.

Exemplo 17

Determinar o resto da divisão inteira de 137 por 3 .

Como $10 \equiv 1 \pmod{3}$ e $10^2 \equiv 1 \pmod{3}$ então, atendendo à proposição 2.2.,

$$137 \equiv 1 \times 1 + 3 \times 1 + 7 \pmod{3}$$

ou seja

$$137 \equiv 11 \pmod 3.$$

Como $11 \equiv 2 \pmod 3$ podemos escrever que $137 \equiv 2 \pmod 3$.

O resto da divisão inteira de 143 por 3 é 2.

Agora sim, estão reunidas as condições para serem apresentados alguns critérios de divisibilidade. Só será realizada a demonstração do critério de divisibilidade por 9, devido à sua utilidade em alguns truques que serão apresentados nos capítulos que se seguem.

Critério de divisibilidade por 2

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 2 é igual ao resto da divisão do algarismo das unidades por 2.

Critério de divisibilidade por 3

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 3 é igual ao resto da divisão da soma de todos os algarismos de a, por 3.

Critério de divisibilidade por 4

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 4 é igual ao resto da divisão da soma do dobro do algarismo das dezenas de a com o algarismo das unidades, por 4.

Critério de divisibilidade por 5

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 5 é igual ao resto da divisão do algarismo das unidades, por 5.

Critério de divisibilidade por 9

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 9 é igual ao resto da divisão da soma de todos os algarismos de a, por 9.

Demonstração

Como $10^i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 9)$, para qualquer inteiro positivo i então, pela Proposição 2.2., podemos escrever que

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0\ (mod\ 9).$$

2.5. Métodos de baralhamento de cartas

No capítulo “Truques com cartas”, a partir da página 95, são utilizados métodos para o baralhamento das cartas. Esta é normalmente a forma como se inicia qualquer truque de magia com recurso às cartas. Quando o mágico corta e baralha as cartas, no início de um truque, o seu objetivo é tranquilizar o espectador, mostrar-lhe que o baralho não está preparado e que tudo está nas mãos do acaso e nos dotes sobrenaturais do mágico. Mas, como veremos mais adiante, a magia está na Matemática subjacente aos procedimentos e, claro, na performance do mágico.

Existem dois tipos de baralhamentos de cartas: os baralhamentos deterministas ou perfeitos (*Perfect Shuffle)* e os baralhamentos probabilísticos (*Riffle Shuffle)*. A realização de um baralhamento determinista não depende do acaso, mas sim de um procedimento que, efetuado uma vez, duas vezes ou mais, conduz sempre a um resultado esperado. É possível com este tipo de baralhamento voltar a colocar as cartas na sua posição original ou conduzir uma carta para uma posição pré-definida. Por sua vez, um baralhamento probabilístico está sujeito a fatores aleatórios, que não são controlados pelo mágico.

2.5.1. Baralhamentos perfeitos ou deterministas

São vários os tipos de baralhamento perfeito ou determinista, como por exemplo, “Faro Out”, “Faro In”, “AntiFaro” e “Under-and-down”. (Rodrigues, 2015) Como já foi referido anteriormente, estes baralhamentos não dependem do acaso, mas sim de um procedimento que, efetuado uma vez, duas vezes ou mais, conduz sempre a um resultado esperado. Um exemplo de baralhamento perfeito ou determinista é o caso do tipo de baralhamento denominado por “Monge”. Este baralhamento é utilizado no truque “A Herança” (página 110).

Baralhamento “Monge”

Este baralhamento tem esta designação em homenagem ao matemático francês Gaspard Monge, que estudou as suas propriedades em 1773. (Belmonte,2013)

O baralhamento “Monge” realiza-se da seguinte forma:

- Com o baralho na mão direita, passamos a carta do topo para a mão esquerda.
- A carta, que se encontra agora no topo do baralho, passa para a mão esquerda e é colocada sobre a outra carta.
- A carta, que está no topo do baralho da mão direita, passa para a mão esquerda, mas desta vez é colocada sob as outras duas.
- Repete-se este procedimento, colocando uma carta por cima, outra por baixo e assim sucessivamente, até ficarmos sem cartas na mão direita.

2.5.2. Baralhamentos probabilísticos

Como já foi referido anteriormente, os baralhamentos probabilísticos estão sujeitos a fatores aleatórios que não são controlados pelo executante. Será abordado o mais conhecido, o *baralhamento "Americano"*, que se pode encontrar no truque "Cartas Baralhadas" (ver página 100).

O baralho é cortado, de forma aleatória, em dois montes, A e B, que poderão ser desiguais. O baralhamento consiste na intercalação das cartas, umas nas outras, de forma aleatória. O baralho misturado terá, por esta ordem: algumas ou nenhumas cartas da parte superior do monte A, seguidas de algumas cartas da parte superior do monte B, seguidas de algumas das restantes cartas do monte A, seguidas de algumas das restantes cartas do monte B, e assim sucessivamente. Cada grupo de cartas que vai sendo intercalado mantém a ordem que possuía no baralho inicial.

Descrição da aplicação do Método de Baralhamento "Americano"

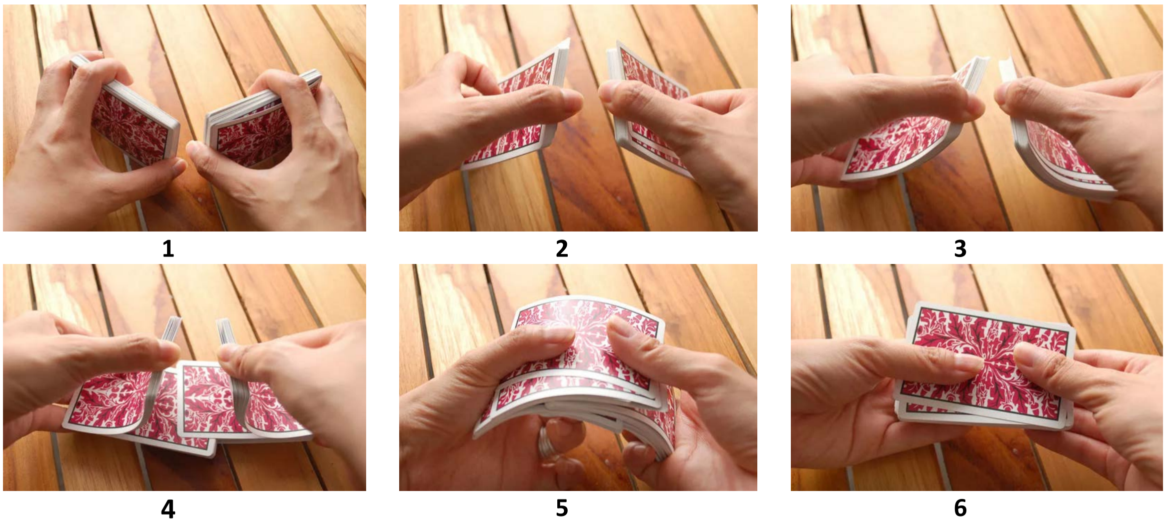


Figura 17

(http://pt.wikihow.com/Embaralhar-Cartas)

Conforme se pode observar na Figura 17, o Método de Baralhamento Monge consiste em executar uma sequência de movimentos que são descritos de seguida.

Divide-se o baralho de cartas aproximadamente a meio, e segura-se cada metade com uma mão (1). Coloca-se o polegar no topo dos baralhos que tem em cada uma das suas mãos (2). Os dedos anelar e médio devem ser colocados no topo oposto ao que colocou o polegar. Estes dedos devem ficar curvados de modo a manter as cartas de cada um dos baralhos no lugar (3). Usando o dedo indicador, empurrar para baixo o centro das cartas e inclinar levemente o lado onde estão os polegares, para cima (4). Lentamente puxar os polegares para trás, liberando o baralho. Quando isso é feito simultaneamente com as duas mãos, as cartas aleatoriamente intercalam-se umas com as outras. Mantendo a posição das mãos, colocar os polegares no local que onde as cartas já estão intercaladas, com as pontas dos dedos empurrando para baixo. Empurrar as cartas, usando os dedos anelar e indicador, para dentro e para baixo mantendo os polegares firmes no lugar. Este movimento deve fazer com que as cartas se curvem e formem um arco (5). Por fim, basta fazer deslizar as cartas de modo a formarem um baralho único (6).

2.6. Princípio do Pombal

O *Princípio do Pombal* ou *Princípio da Casa dos Pombos* diz-nos que se n pombos devem ser postos em m casas, e se $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo.

Matematicamente falando, isto quer dizer que o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos do conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.

Figura 18: Inspiração para o nome do princípio (*Princípio do Pombal* para $n = 10$ e $m = 9$).

(https://pt.wikipedia.org/wiki/Principio_da_casa_dos_pombos)

Este Princípio é também conhecido como Teorema de Dirichlet ou Princípio das Gavetas de Dirichlet, pois supõe-se que o primeiro relato deste princípio foi feito por Dirichlet em 1834, com o nome de *Schubfachprinzip* (“Princípio das Gavetas").

Embora se trate de uma evidência extremamente elementar, o princípio é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e quem faz o papel das casas.

Exemplo 7

Quantas pessoas são necessárias para se ter a certeza que haverá pelo menos duas delas cujo aniversário é no mesmo mês?

Solução: 13 pessoas. Pelo *Princípio do Pombal* se houver mais pessoas (13) do que meses (12) é certo que pelo menos duas pessoas terão nascido no mesmo mês.

Exemplo 8

Todos os pontos de um plano são pintados de amarelo ou verde. Prove que podemos encontrar dois pontos da mesma cor que distam exatamente um metro.

Solução: Basta imaginarmos um triângulo equilátero de lado igual a um metro. Como são duas cores (casas) e três pontos (pombos), pelo *Princípio do Pombal* teremos dois da mesma cor.

Embora este princípio seja uma observação trivial, pode ser usado para demonstrar resultados possivelmente inesperados.

Exemplo 9

Em qualquer grande cidade (digamos com mais de 1 milhão de habitantes) existem pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Solução: Tipicamente uma pessoa tem cerca de 150 mil fios de cabelo. É razoável supor que ninguém tem mais de 1.000.000 de fios de cabelo na sua cabeça. Se há mais habitantes do que o número máximo de fios de cabelo, necessariamente pelo menos duas pessoas terão precisamente o mesmo número de fios de cabelo.

Alguns exemplos de aplicação do *Princípio do Pombal* poderão ser utilizados em sala de aula. Mais uma vez se trata da Matemática Recreativa a ser utilizada com o intuito de desafiar os alunos, estimulando-os para a resolução de problemas.

Exemplo 10

Uma tabela 3×3 está preenchida com os números -1, 0 e 1. Mostre que são iguais pelo menos duas das 8 somas referentes a todas as colunas, todas as linhas e às duas diagonais.

Solução: Tendo em conta que cada um dos quadrados é preenchido com os números -1, 0 ou 1, os possíveis resultados das somas referentes a cada coluna, linha ou diagonal é um número pertencente ao seguinte conjunto: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Tem-se deste modo 7 resultados possíveis para a soma. Atendendo a que existem 3 colunas, 3 linhas e 2 diagonais, obtêm-se 8 somas. Pelo Princípio do Pombal, se houver mais somas obtidas (8) do que resultados possíveis (7) é certo que pelo menos duas dessas somas serão iguais.

Exemplo 11

Tenho uma gaveta com muitas meias todas iguais exceto na cor. Umas são brancas, outras pretas e outras azuis. Qual o número mínimo de meias que devo retirar da gaveta, às escuras, para ter a certeza de que:

a) tiro duas meias da mesma cor para calçar hoje?
b) tiro quatro meias da mesma cor, um par para calçar hoje e outro para calçar amanhã?
c) tiro quatro meias, duas da mesma cor para calçar hoje e outras duas também da mesma cor para calçar amanhã (não importa se a cor de hoje é a mesma de amanhã)?
d) tiro quatro meias, duas de uma cor e outras duas de outra cor, um par para calçar hoje e outro para calçar amanhã?

Solução:

a) Pelo *Princípio do Pombal* devo tirar pelo menos mais uma meia do que o número de cores diferentes que existem na gaveta. Assim, são necessárias pelo menos 4 meias para garantir que terei um par demeias da mesma cor.

b) Considere-se a pior das situações, suponha-se que cada vez que é retirada uma meia, nunca sai uma cor igual à cor da meia retirada imediatamente antes:

$$\boldsymbol{B}/P/A/\boldsymbol{B}/P/A/\boldsymbol{B}/P/A/\boldsymbol{B}$$

Sendo assim, só ao fim de 10 retiradas é que se obtém 4 meias de cor igual.
Pode-se até generalizar: se se pretende retirar n meias da mesma cor, é necessário retirar $3 \times (n-1) + 1$ meias, onde 3 corresponde ao número de cores diferentes que existe e o 1 será a última meia a ser retirada que permite perfazer as n meias da mesma cor.

c) Pretende-se tirar dois pares de meias da mesma cor. Suponhamos, mais uma vez, a pior das hipóteses. Sendo assim, parte-se do princípio que se retiram três meias de cores diferentes. A quarta meia será obrigatoriamente da mesma cor de uma das anteriores. Obtém-se, deste modo, o primeiro par de meias da mesma cor. Mais uma vez, partindo do princípio da pior hipótese, a meia seguinte pode ter a mesma cor do par que já está formado, por isso, só na retirada seguinte se conseguirá obter mais um par de meias da mesma cor:

$$\boldsymbol{B}/P/A/\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}\ + 1\ meia\ qualquer$$

d) Suponhamos que existem n meias de uma das cores, sendo essa a cor que existe em maior quantidade. Podem ser retiradas, mais uma vez, no pior dos casos, as n meias dessa cor que existe em maior quantidade, todas seguidas, donde só é possível obter o primeiro par de meias de uma das cores. Fica a faltar o par de meias da outra cor. De seguida, retiram-se mais duas meias, que na lógica da pior hipótese possível, serão de cores diferentes, entre si e do par que já se obteve. Neste momento, foram então retiradas $n + 2$ meias. Por fim, ao retirar mais uma meia, fica garantido que a cor da meia será repetida de algumas das três que já foram retiradas. Obtém-se, finalmente, os dois pares de cores diferentes.

2.7. Princípio de *Gilbreath*

O *Princípio de Gilbreath*, popularizado por Martin Gardner na comunidade matemática, consiste em retirar efeitos surpreendentes, e pouco intuitivos, de uma preparação simples do baralho de cartas. Em 2001, Simon Aronson aplicou o mesmo resultado à criação de um jogo de azar, em que a "sorte" está do lado de quem sabe a matemática envolvida!

O mágico baralha as 52 cartas (baralhamento americano) à frente da audiência. Depois, retira e exibe as cartas duas a duas. Cada par é composto por uma carta de cada cor. Como é possível!? Todos viram o mágico baralhar as cartas!...
A preparação do truque que utiliza o *Princípio de Gilbreath* consiste em começar com um baralho com as cartas com as cores alternadas, dividido em dois montes tais que as cartas superiores são de cores diferentes. O que acontece é que, mesmo depois de baralhadas, cada par de cartas, a partir do topo, tem uma carta de cada cor. O baralhar estraga a alternância das cores, na maioria dos casos, mas não retira toda a estrutura do arranjo inicial.
O resultado descoberto por Norman Gilbreath nos anos 80 permite efetuar muitos truques matemáticos com cartas de efeito bastante interessante. (Silva, 2014)

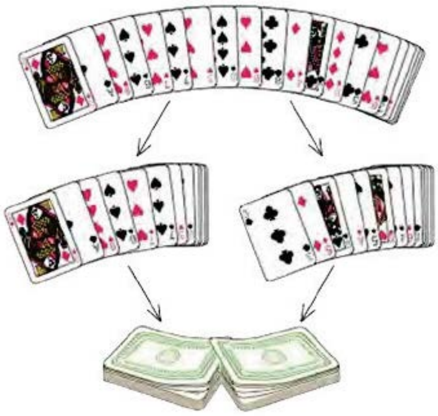


Figura 19: A preparação associada ao Princípio de *Gilbreath*
(Gazeta de Matemática, SPM, julho 2014)

O *Princípio de Gilbreath* pode ser enunciado do seguinte modo:
"Um baralho de cartas alternadas em vermelhas e pretas é separado em dois montes, sendo que no cimo de um monte temos uma carta preta e, no cimo do outro, uma carta vermelha. De seguida, os montes são baralhados usando o método americano (este método de baralhamento de cartas está descrito no subcapítulo "Métodos de baralhamento", na página 41). Ao retirar cartas do baralho, duas a duas, observa-se que saem sempre cores diferentes."

Este princípio pode aplicar-se de um modo mais geral.

Por exemplo, ordenarem-se as cartas em sequências de 4 cartas: Espadas, Paus, Ouros e Copas, sucessivamente. Depois colocam-se uma a uma as cartas do baralho na mesa, de modo a inverter a ordem, e por forma a dividir o baralho sensivelmente a meio, obtendo-se dois montes (por ordens inversas). De seguida, efetua-se um baralhamento americano. Por fim, ao retirar 4 cartas de cada vez, obtém-se sempre conjuntos de 4 cartas contendo os quatro naipes do baralho.

A generalização do *Princípio de Gilbreath* é conhecida como *2º Princípio de Gilbreath*.

"Organiza-se um baralho de cartas formando uma sequência periódica, de período k. Desse baralho, colocam-se as cartas, uma a uma na mesa, até que o baralho fique dividido sensivelmente a meio, invertendo assim a sua ordem, num dos montes. Em seguida, os montes são baralhados pelo método americano. Retiram-se k a k cartas, consecutivamente, desde o início do baralho, e em cada conjunto de k cartas que for retirado encontra-se sempre uma carta de cada tipo do período inicial."

Pode encontrar-se uma das aplicações do *Princípio de Gilbreath* no truque "Cartas baralhadas", que se encontra na página 100.

2.8. Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos

2.8.1. Quadrados Latinos

Definição 2.8: Um quadrado latino de ordem n é uma matriz $n \times n$ preenchida com n símbolos diferentes de tal maneira que ocorrem no máximo uma vez em cada linha e coluna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & d & c \\ b & c & a & d \\ c & d & b & a \\ d & a & c & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 20: Quadrados latinos de ordem 3, 4 e 3, respetivamente

O nome quadrado latino teve origem em Leonhard Euler, que utilizou carateres latinos como símbolos.

Um quadrado latino é considerado *reduzido* (quadrados *latinos padrões* ou *quadrados latinos standard*) se as letras se dispõem por ordem alfabética na primeira linha e na primeira coluna ou se os números estiverem por ordem crescente. Por exemplo, o primeiro quadrado latino da Figura 20 é reduzido porque a sua primeira linha e sua primeira coluna são ambos 1 2 3, mas os restantes quadrados latinos representados já não são reduzidos.

Na Figura 21 pode ver-se um exemplo de um quadrado latino de ordem 10, em que cada linha e cada coluna contêm todos os algarismos de 0 a 9.

0	4	8	2	3	9	6	7	1	5
3	6	2	8	7	1	9	5	0	4
8	9	3	1	0	6	4	2	5	7
1	7	6	5	4	8	0	3	2	9
2	1	9	0	6	7	5	8	4	3
5	2	7	4	9	3	1	0	8	6
4	3	0	6	1	5	2	9	7	8
9	8	5	7	2	0	3	4	6	1
7	0	1	9	5	4	8	6	3	2
6	5	4	3	8	2	7	1	9	0

Figura 21: Quadrado latino de ordem 10

2.8.2. Quadrados Mágicos

Os quadrados latinos podem ser usados para construir quadrados mágicos.

Definição 2.9: Um quadrado mágico é um conjunto de números inteiros diferentes colocados numa formação quadrada de tal modo que a soma dos números em cada fila, coluna e diagonal é a mesma.

Num trabalho intitulado "História dos Quadrados Mágicos" e realizado pela aluna Tânia Lopes, no âmbito da disciplina de História da Matemática lecionada pelo professor Jaime Carvalho e Silva do Departamento de Matemática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, pode encontrar-se informação sobre a origem e as caraterísticas dos Quadrados Mágicos, os quais são explorados nesta secção.

Há diversas versões sobre a origem dos quadrados mágicos, no entanto, pensa-se que a sua origem tenha vindo da China e da Índia. Os historiadores dizem que os quadrados mágicos terão surgido há cerca de 3000 anos. Na época considerava-se que este tipo de quadrados tinham poderes especiais, por esse motivo lhes foi dado esse nome.

Cerca de 2200 a.c., o imperador-engenheiro Yu, o Grande, estaria a observar o rio Amarelo quando viu uma tartaruga (naquela época, a tartaruga era considerada um animal sagrado, divino), onde se podia ver um símbolo na sua carapaça. O símbolo era formado por nós e Yu percebeu que estes podiam ser transformados em números de um a nove. Observou ainda que a soma destes números em todas as direções (colunas, linhas e diagonais) era quinze. A partir daí, esses números foram considerados mágicos. Hoje em dia, esse símbolo é conhecido pelo nome de Lo Shu (ver Figura 22). (*A história dos quadrados mágicos*, História da matemática, Jaime C. Silva)

6	**1**	**8**
7	**5**	**3**
2	**9**	**4**

Figura 22: Símbolo da carapaça da tartaruga e respetivo quadrado mágico "Lo-Shu"
(A história dos quadrados mágicos, História da matemática, Jaime C. Silva)

Sabe-se que existe uma expressão para obter o número constante da soma dos números das linhas, das colunas e das diagonais de um determinado quadrado mágico, em que os números usados são consecutivos, a que se dá o nome de número planetário, S:

$$S = \frac{n + n^3}{2}$$

onde n é o lado do quadrado.

Os quadrados mágicos podem ser classificados em três tipos, quadrados mágicos imperfeitos ou defeituosos, quadrados mágicos hipermágicos e quadrados mágicos diabólicos.

Os quadrados mágicos imperfeitos ou defeituosos não obedecem a todas as regras de um quadrado mágico. Por exemplo, um quadrado mágico em que se verifica a igualdade entre a soma de todas as linhas e de todas as colunas, e o mesmo já não acontece com as diagonais.

Os quadrados mágicos hipermágicos, além de obedecerem às regras básicas dos quadrados mágicos, têm propriedades adicionais. Por exemplo, um quadrado mágico onde se troca duas colunas de lugar e se forma um outro quadrado mágico, é um quadrado mágicos hipermágico (ver Figura 23). (*A história dos quadrados mágicos*, História da matemática, Jaime C. Silva)

2	7	6		6	7	2
9	5	1	⇨	1	5	9
4	3	8		8	3	4

4	3	8		8	3	4
9	5	1	⇨	1	5	9
2	7	6		6	7	2

4	9	2		2	9	4
3	5	7	⇨	7	5	3
8	1	6		6	1	8

8	1	6		6	1	8
3	5	7	⇨	7	5	3
4	9	2		2	9	4

Figura 23: Exemplo de 4 quadrados mágicos hipermágicos, com a respetiva alteração

Os quadrados mágicos diabólicos são quadrados hipermágicos que verificam uma série de propriedades complexas. O nome diabólico vem da dificuldade de os formar. Um exemplo de quadrado mágico diabólico é o seguinte:

25	**1**	**12**	**7**
11	**8**	**24**	**2**
5	**10**	**3**	**27**
4	**26**	**6**	**9**

Figura 24: Quadrado Mágico Diabólico

Este quadrado mágico é classificado com diabólico dado as suas propriedades. Observe-se que a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal é igual a 45. Também a soma dos números dos quatro cantos deste quadrado é 45.

Considerem-se agora quatro dos quadrados 2×2, que se obtêm a partir do quadrado inicial:

25	1
11	8

12	7
24	2

5	10
4	26

3	27
6	9

Se se adicionar os números de cada um dos quadrados 2×2 obtidos, a soma desses números é 45.

Se se adicionar os números que ocupam as diagonais do 1º e do 4º quadrado 2×2, respetivamente 1 e 11, com 6 e 27, também a soma obtida é 45.

Se se considerar o quadrado 2×2 que se encontra no centro do quadrado inicial, também se obtém a soma 45.

De seguida, considerem-se os quadrados 3×3 que se podem obter a partir do quadrado inicial.

25	1	12
11	8	24
5	10	3

1	12	7
8	24	2
10	3	27

11	8	24
5	10	3
4	26	6

8	24	2
10	3	27
26	6	9

Se se adicionarem os números que ocupam a posição dos cantos em cada um destes quatro quadrados 3×3, a soma obtida é 45.

Na página 107 encontra-se o truque “Quadrado Mágico Diabólico” em que o Mágico constrói um quadrado mágico deste tipo seguindo orientações do público. O método para a sua construção está descrito nos fundamentos matemáticos desse truque.

2.8.3. A Ciência do Sudoku

O sudoku é um quebra-cabeça matemático, que não requer cálculos, nem habilidades aritméticas e que se tornou imensamente popular num curto período de tempo. O sudoku é formado por um quadrado bidimensional, que, na sua versão mais comum, contém 81 casas, agrupadas por sua vez, em nove quadrados menores, chamadas “subgrades”, com nove casas cada um. O jogo começa com algumas casas já preenchidas por números, cabendo ao jogador completar as casas restantes com algarismos de 1 a 9, de modo que nenhum deles se repita na mesma coluna ou linha, nem dentro da mesma subgrade. Cada quebra-cabeça tem uma única solução.

De uma forma geral, o Sudoku é um quadrado latino, de ordem n, podendo estar dividido em quadrados mais pequenos de com n casas (subgrades de dimensão $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$) que devem conter os n símbolos que preenchem cada linha ou coluna do quadrado maior. Um sudoku padrão, portanto, é um quadrado latino de ordem 9, com a condição adicional de cada subgrade de nove casas ter que conter os números de 1 a 9.

O aposentado Wayne Gould conheceu o jogo numa visita ao Japão em 1997. Interessou-se e criou um programa de computador para gerar várias configurações do quadrado. Em 2004, Gould fez uma proposta ao jornal Times, de Londres, que consistia em publicar o quebra-cabeça. Essa proposta foi aceite. Em 2005, o mesmo aconteceu com o Daily Telegraph, levando assim o jogo ao sucesso. Hoje em dia, em Portugal, o sudoku aparece na maioria dos jornais e revistas de grande tiragem. (Nadai, 2015)

2.9. Topologia

2.9.1. Introdução à Topologia

Os números reais têm dois tipos de propriedades: o primeiro consiste nas propriedades algébricas e o outro tem a ver com as propriedades métricas ou topológicas com origem nas propriedades do módulo. De seguida serão apresentados alguns resultados cujo objetivo é o estudo das propriedades topológicas, e de um modo mais geral, dos espaços métricos. (Staicu,1998)

Observação 2.1:

(i) A definição de continuidade duma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ num ponto $x \in \mathbb{R}$,

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\forall y \in \mathbb{R}: |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

pode ser enunciada usando $|y - x|$ como medida de distância entre x e y.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$ se $f(y)$ estiver próximo de $f(x)$ sempre que y estiver suficientemente próximo de x.

(ii) Para estudar funções contínuas (reais de variável real) apenas é necessário saber que a função módulo (ou valor absoluto) verifica as seguintes propriedades:

- **a)** $|x| \geq 0;$
- **b)** $|x| = 0 \; se \; e \; só \; se \; x = 0;$
- **c)** $|x - y| = |y - x|;$
- **d)** $|x + y| \leq |x| + |y|.$

Definição 2.10: Seja X um conjunto não vazio. Uma função $f: X \times X \to \mathbb{R}$ chama-se métrica (ou distância) em X se:

(i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X;$

(ii) $d(x, y) = 0 \; se \; e \; só \; se \; x = y;$

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X;$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), , \forall x, y, z \in X.$

Se d é uma métrica em X, então o par (X, d) é um **Espaço Métrico**.

Definição 2.11: Duas métricas d e d' definidas no mesmo conjunto de pontos X dizem-se topologicamente equivalentes se as seguintes condições se verificam:

(i) para todo $x, y \in X$ e $\delta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que:

$$d'(x,y) < \delta' \Rightarrow d(x,y) < \delta.$$

(ii) para todo $x, y \in X$ e $\delta' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(x,y) < \delta'.$$

Definição 2.11: Chamam-se propriedades topológicas dum espaço métrico (X, d) todas as propriedades que não mudam quando a métrica d é substituída por uma métrica topologicamente equivalente d'.

2.9.2. Fita de Möbius

Em Matemática, a Fita de *Möbius* é um exemplo de uma superfície não-orientável e o seu estudo deu origem a um ramo da Matemática que chamamos de Topologia. A Topologia estuda os espaços topológicos e é considerada uma extensão da geometria.

A Fita de *Möbius* é um tipo especial de superfície onde não há lado de dentro ou de fora, ou seja, nela só há um lado e uma única borda que é uma curva fechada. A tal fita foi descoberta pelo astrónomo e matemático alemão August Ferdinand Möbius (1790-1868), que estudou esse objeto em 1858 motivado por um concurso promovido pela Academia de Ciências de Paris que, na época, estava a tentar estimular o estudo da teoria geométrica dos poliedros.

Figura 25: August Ferdinand Möbius
(http://explorerworld.hu/2012/09/26/meghalt-august-ferdinand-mobius/)

O objeto acabou por ficar popularmente conhecido como *Fita de Möbius*.

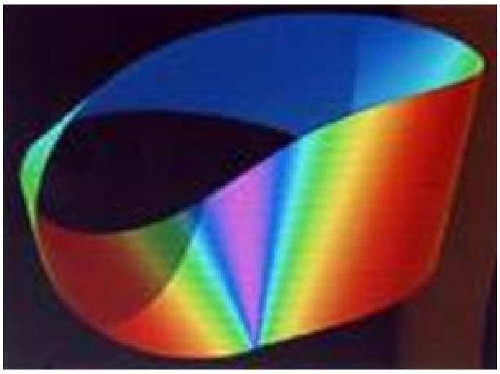


Figura 26: Fita de Möbius
(http://maraeducare.blogspot.pt/)

A Fita de Möbius inspirou o artista holandês Mauritus Cornelis Escher (1898-1972) em vários trabalhos que ficaram mundialmente conhecidos. A figura seguinte, com as formigas, é um dos seus trabalhos.

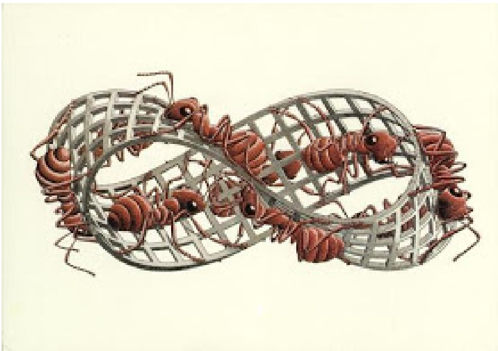


Figura 27: Fita de Möbius com formigas, M. C. Escher
(http://maraeducare.blogspot.pt/)

O que faz da fita algo interessante são algumas das suas características, como se pode ver mais à frente no subcapítulo 5.7, na página 145.

2.9.3. Formas topologicamente equivalentes

Para se perceber o que são formas tolopogicamente equivalentes vamos considerar superfícies que podem ser deformadas, sem se efetuar cortes, de modo a que o seu aspeto permaneça inalterado. No entanto, tem que se garantir que as suas propriedades intrínsecas não se alteram. Assim, deixa de haver um enquadramento geométrico para se passar a assumir um enquadramento topológico.

A topologia é o ramo da matemática que se preocupa com o estudo da continuidade.
A topologia dá ênfase às propriedades de formas que permanecem inalteradas, não dando importância ao facto dessas formas estarem a ser torcidas ou manipuladas de qualquer outra

maneira.
Tais transformações de objetos estão sujeitas somente à condição de que, para superfícies, pontos vizinhos permaneçam próximos no processo de transformação. Esta condição exclui todas as transformações que impliquem corte e colagem.

Por observação da figura seguinte (Figura 28), constata-se que a “rosca” e a “chávena” são topologicamente equivalentes. Uma delas pode ser continuamente transformada na outra e vice-versa. O buraco central que caracteriza a “rosca” é preservado como o buraco que existe na pega da “chávena”.

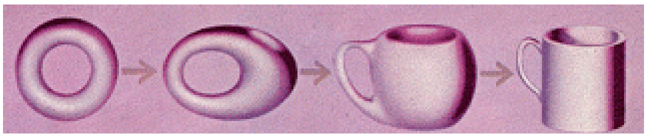


Figura 28: Transformação da “rosca” na “chávena”
(http://disquisicionesantropo-topolgicas.blogspot.pt/2010/07/disquisiones-antropo-topologicas.html)

Concluindo, pode-se dizer que duas superfícies são topologicamente equivalentes, se uma puder ser transformada na outra através de deformações sem efetuar cortes nem colagens.

Capítulo 3

3. Truques com números

Neste capítulo podem-se encontrar truques em que são utilizados cálculos com números, mentalmente ou com recurso à calculadora. Os efeitos descritos têm por base conceitos matemáticos que envolvem a sucessão de *Fibonacci*, o sistema de base 2, as propriedades da divisibilidade dos números, nomeadamente do número 9, entre outros.

3.1. Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*

Objetivo

Adivinhar a soma de dez números gerados a partir de dois números escolhidos aleatoriamente por um voluntário.

Material usado

Quadro branco, marcadores e calculadora.

Recursos Humanos

Apresentador, Mentalista e voluntário do público.

Descrição resumida

O Mentalista venda os olhos. O Apresentador chama um voluntário do público e pede-lhe para escrever no quadro dois números aleatórios (com um ou dois algarismos), um por baixo do outro.

Em seguida, pede ao voluntário para adicionar os números, obtendo um terceiro número, que deverá ser escrito por baixo dos outros dois. O quarto número é obtido pela adição dos dois números anteriores (segundo e terceiro) e, cada número até ao décimo, é obtido pelo mesmo processo (soma dos dois números anteriores). Geram-se assim os 10 primeiros termos de uma sucessão generalizada de *Fibonacci* cujos 2 primeiros termos são escolhidos aleatoriamente pelo voluntário.

Neste momento, o Apresentador convida o voluntário e os restantes elementos do público a usar a calculadora para somar os dez números que estão no quadro. Em simultâneo, o Mentalista retira a venda e vira-se para o quadro começando o cálculo da soma dos dez números mentalmente.

Rapidamente, e ainda antes do público ter terminado o cálculo com recurso à calculadora, o Mentalista dá indicação do resultado.

Explicação matemática

Recurso a um exemplo

Vamos supor que o voluntário escolhe os números 5 e 7.

Adicionam-se os algarismos indicados pelo voluntário. Obtém-se o número 12.

A partir daqui, cada número obtido é adicionado ao anterior.

Obtém-se assim a seguinte lista: 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343.

O Mentalista ao ver os números no quadro rapidamente indica o resultado, 891.

Fundamentos matemáticos

Sejam a e b os números escolhidos pelo voluntário do público. O voluntário adiciona os dois números, obtendo $a+b$. A partir daqui adiciona-se a soma obtida com o número anterior. Obtém-se deste modo a lista dos dez números, sobre os quais se pretende adivinhar a soma.

1º número	a
2º número	b
3º número	$a+b$
4º número	$b+(a+b)=a+2b$
5º número	$(a+b)+(a+2b)=2a+3b$
6º número	$(a+2b)+(2a+3b)=3a+5b$
7º número	$(2a+3b)+(3a+5b)=5a+8b$
8º número	$(3a+5b)+(5a+8b)=8a+13b$
9º número	$(5a+8b)+(8a+13b)=13a+21b$
10º número	$(8a+13b)+(13a+21b)=21a+34b$

Tabela 3: Expressão algébrica correspondente a cada um dos 10 números.
(Sucessão Generalizada de *Fibonacci*)

Por último, adicionam-se os dez números obtidos.

$$a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) + (13a + 21b) + (21a + 34b) = 55a + 88b$$

Tendo em conta que $55a + 88b = 11(5a + 8b)$, e que $5a + 8b$ corresponde ao sétimo número obtido, para descobrir a soma dos dez números da lista basta determinar o produto de 11 pelo sétimo número da mesma.

Note-se que multiplicar um número por 11, corresponde a multiplicar um determinado número por 10 e em seguida adicionar o próprio número a esse resultado.

Exemplo: $81 \times 11 = 81 \times 10 + 81 = 810 + 81 = 891$

Dicas

Por vezes os voluntários levam muito tempo a efetuar os cálculos. Nestes casos, o Apresentador deve ajudar para que o truque não se torne aborrecido para quem está a assistir.

O Apresentador também deve ter o cuidado de chamar a atenção para que nenhum dos números seja dito em voz alta, pois o Mentalista só pode conhecer o número no final.

Convém ainda colocar música de fundo enquanto o voluntário efetua os cálculos.

Sugere-se que durante a realização dos cálculos seja colocada música de fundo, e para este efeito, aconselha-se a utilização de música de transe.

3.2. Adivinhar a soma de n termos de *Fibonacci*

Objetivo

Adivinhar a soma de n números gerados a partir de dois números escolhidos aleatoriamente por um voluntário.

Material usado

Quadro branco, marcadores e calculadora.

Recursos Humanos

Apresentador, Mentalista e voluntário do público.

Descrição resumida

O procedimento usado na aplicação deste truque é semelhante ao usado no truque "Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*" (ver página 58). Por este motivo, identifica-se este truque como uma alternativa ao anterior.

Assim, o truque inicia-se de igual modo, com o Mentalista a vendar os olhos e com o Apresentador a chamar um voluntário do público, pedindo-lhe para escrever no quadro dois números aleatórios (com um ou dois algarismos), um por baixo do outro. Para além disso, o Apresentador pede ao voluntário que diga em voz alta um número entre 10 e 15. Esse número, designado por n, será o número de termos a somar no final.

Em seguida, são adicionados pelo voluntário os números escritos, obtendo um terceiro número, que deverá ser escrito por baixo dos outros dois. O quarto número é obtido pela adição dos dois números anteriores (segundo e terceiro) e, cada número até ao n-ésimo, é obtido pelo mesmo processo (soma dos dois números anteriores). Gera-se assim n termos de uma sucessão generalizada de *Fibonacci*, conforme o pretendido para a realização do truque, tendo por base os dois primeiros termos escolhidos aleatoriamente pelo voluntário.

De seguida, o Apresentador convida o voluntário e os restantes elementos do público a usar a calculadora para somar os n números. Em simultâneo, o Mentalista retira a venda e vira-se para o quadro começando o cálculo da soma dos n números mentalmente.
Rapidamente, e ainda antes do público ter terminado o cálculo com recurso à calculadora, o Mentalista dá indicação do resultado.

Explicação matemática

Recurso a um exemplo

Vamos supor que o voluntário escolhe os números 5 e 7. Neste momento, o Apresentador pede ao voluntário para dizer, em voz alta, um número entre 10 e 15, e o voluntário escolhe o 12. Este número representa a quantidade de números da lista que irão ser adicionados. Começam-se por adicionar os algarismos indicados pelo voluntário. Obtém-se o número 12.
A partir daqui, cada número obtido é adicionado ao anterior.
Obtém-se assim a seguinte lista, com 12 números:

5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555, 898.

Neste momento, o Apresentador convida o voluntário e os restantes elementos do público a usar a calculadora para somar os doze números que estão no quadro. Em simultâneo, o Mentalista retira a venda e vira-se para o quadro começando o cálculo da soma dos seis números mentalmente.
Rapidamente, e ainda antes do público ter terminado o cálculo, com recurso à calculadora, o Mentalista dá indicação do resultado, 2344.

Fundamentos matemáticos

Sejam a e b os números escolhidos pelo voluntário do público. O voluntário adiciona os dois números, obtendo $a + b$. A partir daqui adiciona-se a soma obtida com o número anterior. Obtém-se deste modo a lista dos dez números, sobre os quais se pretende adivinhar a soma.

1º número	a
2º número	b
3º número	$a + b$
4º número	$b + (a + b) = a + 2b$
5º número	$(a + b) + (a + 2b) = 2a + 3b$
6º número	$(a + 2b) + (2a + 3b) = 3a + 5b$
7º número	$(2a + 3b) + (3a + 5b) = 5a + 8b$
8º número	$(3a + 5b) + (5a + 8b) = 8a + 13b$
9º número	$(5a + 8b) + (8a + 13b) = 13a + 21b$
10º número	$(8a + 13b) + (13a + 21b) = 21a + 34b$

Tabela 4: Expressão algébrica correspondente a cada um dos 10 números.

O resultado da adição dos 6 primeiros números obtém-se subtraindo o segundo número ao oitavo, sendo fácil efetuar este cálculo mentalmente.

(Para obter a soma dos dez números escritos, o Mentalista calcula mentalmente, ou com papel e lápis, os dois números que se seguiriam na coluna e subtrai o segundo ao décimo segundo.)

Este truque baseia-se na primeira propriedade da sucessão de *Fibonacci*, onde se refere que a soma S_n , $n > 1$, dos n primeiros termos da sucessão de *Fibonacci* generalizada é dada por:

$$S_n = a_{n+2} - a_2$$

Sendo assim, para adicionar um determinado número de termos (n) de uma sucessão generalizada de *Fibonacci*, basta apenas determinar o termo de ordem $n + 2$ e subtraí-lo ao segundo termo da sucessão.

Explicação matemática

Note-se que nesta variante, o Mentalista tem que ter a capacidade de efetuar vários cálculos mentais rapidamente.

As dicas indicadas no truque anterior (Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*, da página 58) aplicam-se também a esta versão do truque. (ver página 60)

Dicas

Sugere-se que durante a realização dos cálculos seja colocada música de fundo, e para este efeito, aconselha-se a utilização de música de transe.

3.3. Dia e mês do aniversário

Objetivo

Descobrir, com recurso a umas tabelas, o dia e mês do aniversário de um voluntário do público.

Material usado

4 tabelas com nomes de meses e 5 tabelas com números referentes a dias do mês.

jan mar	fev mar	abr mai	ago set
mai jul	jun jul	jun jul	out nov
set nov	out nov	dez	dez

Figura 29: Tabelas com nomes dos meses

1 3 5 7 9	2 3 6 7 10	4 5 6 7 12	8 9 10 11	16 17 18
11 13 15	11 14 15	13 14 15	12 13 14	19 20 21
17 19 21	18 19 22	20 21 22	15 24 25	22 23 24
23 25 27	23 26 27	23 28 29	26 27 28	25 26 27
29 31	30 31	30 31	29 30 31	28 29 30
				31

Figura 30: Tabelas com os dias dos meses

Nota: Estas tabelas estão disponíveis, em anexo, para reprodução.

Recursos Humanos

Um Mágico, Apresentador, DJ e um voluntário do público.

Descrição resumida

O Mágico escolhe alguém da assistência que queira participar. Seguidamente explica que vão ser mostradas as tabelas da Figura 29 e que tudo o que o voluntário tem de fazer é responder se, “SIM” ou “NÃO”, o mês do seu aniversário se encontra em cada uma das tabelas. Com base nas quatro respostas do voluntário o mágico adivinha o seu mês do aniversário.

De seguida mostra, também uma por uma, as tabelas da Figura 30. Mais uma vez, à pergunta “O dia do teu aniversário está nesta tabela?”, o voluntário deverá responder apenas “SIM” ou “NÃO”. Por fim o Mágico, depois de alguma concentração, diz o dia e o mês do aniversário do voluntário.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

A explicação tem como fundamento o sistema de numeração de base 2, codificado em “NÃO” e “SIM”, correspondendo respetivamente aos algarismos “Zero” e “Um”.

Basicamente, as respostas do voluntário às perguntas efetuadas vão fornecer os algarismos dos números correspondentes ao mês e ao dia do aniversário, expressos na base dois. Tudo o que o Mágico tem de fazer é converter esses números para a base 10.

Os meses de um ano são 12 pelo que são necessários no máximo 4 algarismos na base 2 para representar esses números. Os dias de um mês são no máximo 31 pelo que são precisos, no máximo, 5 algarismos na base 2 para os representar. Daí serem necessárias 4 tabelas para adivinhar o mês e 5 tabelas para adivinhar o dia.

A seguir pode ver-se a tabela de correspondência entre os meses e os respetivos números na base 2.

Mês	Base 10	Base 2	Notação expandida
Janeiro	1	1	$2^0 = 1$
Fevereiro	2	10	$2^1 = 2$
Março	3	11	$2^1 + 2^0 = 3$
Abril	4	100	$2^2 = 4$
Maio	5	101	$2^2 + 2^0 = 5$
Junho	6	110	$2^2 + 2^1 = 6$
Julho	7	111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
Agosto	8	1000	$2^3 = 8$
Setembro	9	1001	$2^3+2^0 = 9$
Outubro	10	1010	$2^3+2^1 = 10$
Novembro	11	1011	$2^3+ 2^1 + 2^0 = 11$
Dezembro	12	1100	$2^3+2^2 = 12$

Tabela 5

A tabela de correspondências para os dias do mês segue a mesma lógica que a anterior acrescentando linhas até ao número 31. A partir do número 16, os respetivos números na base 2 irão necessitar de 5 algarismos, daí a necessidade da quinta tabela.

Exemplo

Suponhamos que a data de aniversário do voluntário é 16 de dezembro.

Ao serem mostradas as tabelas dos meses, pela ordem que se encontram em cima, a resposta do voluntário à pergunta “ O mês do teu aniversário está nesta tabela?” é: “NÃO – NÃO – SIM – SIM”. O Mágico pensa um pouco e responde “dezembro é o mês do teu aniversário”.

Em seguida são mostradas as tabelas referentes aos dias dos meses pela ordem indicada em cima. À pergunta “Nesta tabela está o dia do teu aniversário?” a resposta deverá ser: “NÃO –

NÃO – NÃO – NÃO – SIM”. Ao que o Mágico, depois de alguma reflexão, deve responder: “O dia 16 é o teu dia de aniversário.”

À resposta relativa ao mês da data de aniversário “NÃO – NÃO – SIM – SIM” corresponde a seguinte codificação em zero e um: 0 – 0 – 1 – 1. Estes algarismos definem o número do mês do aniversário do voluntário, na base dois. A ordem pela qual foram mostradas as tabelas fornece os algarismos começando pela ordem das unidades e avançando um a um para as ordens superiores. Assim, o número correspondente no código binário é $1100_{(2)}$ que é transformado na base 10 em: $2^3 + 2^2 = 12$, logo correspondendo ao mês de dezembro.

À resposta relativa ao dia do mês da data de aniversário “NÃO – NÃO – NÃO – NÃO – SIM” corresponde a codificação 0 – 0 – 0 – 0 – 1. O número no código binário é $10000_{(2)}$ que é transformado em $2^4 = 16$.

Dicas práticas

Este truque pode ser realizado apenas por um Mágico que segura as tabelas e as vai mostrando ao público. No entanto, para não dar a ideia que o Mágico está a consultar as tabelas durante a realização do truque, o ideal é ser feito por um Mágico de olhos vendados que adivinha o mês e o dia do aniversário e um ajudante que mostra as tabelas e faz as perguntas. O ajudante (Apresentador ou outro elemento da equipa) deve sempre repetir as respostas do voluntário para que o Mágico as ouça a todas com clareza.

A ordem pela qual as tabelas são mostradas não tem de ser a referida anteriormente. A vantagem de mostrar pela ordem dada em cima é ordem prática. A 1ª tabela é a das unidades e o seu primeiro número é o 1. A segunda tabela é a de 1ª ordem (dos “grupos de dois”) e o seu primeiro número é 2. A terceira tabela é a de 2ª ordem e o seu primeiro número é $2^2=4$. A quarta tabela é a de 3ª ordem e o seu primeiro número é $2^3=8$. Finalmente, no caso dos dias do mês, a quinta tabela é a de 4ª ordem e o seu primeiro número é $2^4=16$. Por esta ordem, tudo o que o mágico tem de fazer é pensar sequencialmente nas potências de 2 (1, 2, 4, 8, 16) e somar o seu valor caso a resposta à pergunta seja “SIM”. Se o Mágico estiver a ver as tabelas, tudo o que tem de fazer é olhar para o primeiro número e entrar com ele na soma caso a resposta seja “SIM”.

Sugestões Adicionais

No caso de haver um DJ na equipa, o DJ começa por colocar a música “Parabéns a você” para que a audiência adivinhe sobre o que trata este truque. Para que todo o público acompanhe a realização do truque, o DJ pode projetar as tabelas. Durante a realização do truque, dependendo do nível de ruído da sala, pode ser conveniente colocar como música de fundo uma versão instrumental desta música.

3.4. Adivinhar o animal preferido

Este truque tem o mesmo fundamento matemático que o truque anterior (ver página 68), no entanto, como este não implica o conhecimento dos números por parte do público, está indicado para utilização no pré-escolar e no 1ºano de escolaridade.

Objetivo

Descobrir, de entre uma lista de animais, e com recurso a tabelas, o animal preferido de um voluntário do público.

Material usado

- Tabela com a lista completa dos animais:

Tabela 6

- 4 Tabelas com animais:

Tabela 7

Nota: As tabelas encontram-se disponíveis, em anexo, para reprodução.

Recursos Humanos

O Mágico, o Apresentador, o DJ e um voluntário do público.

Descrição resumida

O Mágico escolhe alguém da assistência que queira participar e mostra-lhe uma tabela com imagens de animais dos quais ele deve escolher o seu preferido, sem o revelar. Seguidamente explica que vão ser mostradas quatro tabelas com animais e que tudo o que o voluntário tem de fazer é responder se "SIM" ou "NÃO", o seu animal preferido se encontra em cada uma das tabelas.

Com base nas quatro respostas do voluntário o Mágico adivinha o seu animal preferido.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

A explicação para este truque é a mesma da descrita no truque "Dia e mês do aniversário", da página 64. Basicamente, as respostas do voluntário às perguntas efetuadas vão fornecer os algarismos dos números correspondentes ao animal escolhido da primeira tabela que foi mostrada ao voluntário do público, expressos na base dois. O Mágico terá de converter esses números para a base 10.
A tabela inicial contém 12 animais pelo que são necessários no máximo 4 algarismos na base 2 para representar esses números. Daí serem necessárias 4 tabelas com 4 respostas para adivinhar o animal preferido.

Tabela de correspondência entre os animais e os respetivos números na base 2

Animal (ordem alfabética)	Base 10	Base 2	Notação expandida
Águia	1	1	$2^0 = 1$
Baleia	2	10	$2^1 = 2$
Cão	3	11	$2^1 + 2^0 = 3$
Dinossauro	4	100	$2^2 = 4$
Elefante	5	101	$2^2 + 2^0 = 5$
Foca	6	110	$2^2 + 2^1 = 6$
Gato	7	111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
Hipopótamo	8	1000	$2^3 = 8$
Iguana	9	1001	$2^3 + 2^0 = 9$
Javali	10	1010	$2^3 + 2^1 = 10$
Koala	11	1011	$2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$
Leão	12	1100	$2^3 + 2^2 = 12$

Tabela 8

Exemplo

Suponhamos que o animal escolhido pelo voluntário do público é o Gato.

Ao serem mostradas as quatro tabelas com os animais, pela ordem que se encontram em cima, a resposta do voluntário à pergunta “ O teu animal preferido está nesta tabela?” é: “SIM – SIM – SIM – NÃO”. O mágico pensa um pouco e responde “o teu animal preferido é o gato”.

À resposta relativa ao animal preferido “SIM – SIM – SIM – NÃO” corresponde a codificação em zero e um seguinte: 1 – 1 – 1 – 0. Estes algarismos definem o número correspondente ao animal escolhido, na base dois. A ordem pela qual foram mostradas as tabelas fornece os algarismos começando pela ordem das unidades e avançando um a um para as ordens superiores. Assim, o número correspondente no código binário é $0111_{(2)}$ que é transformado na base 10 em: $2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$, logo correspondendo à sétima letra do alfabeto, a letra G, correspondendo ao animal escolhido, o Gato.

Dicas

Para contribuir para a envolvência por parte do público, o DJ pode colocar sons de animais como banda sonora para este truque.

3.5. Adivinhar a data de nascimento

Este truque serve de alternativa ao truque “Dia e mês de aniversário” (página 64).

Objetivo

Descobrir a data de nascimento (dia, mês e ano) de um voluntário do público.

Recursos Humanos

O Mentalista, o DJ e um voluntário.

Descrição resumida

O Mentalista escolhe alguém da assistência que queira participar. Começa por pedir ao participante que escreva, secretamente, o número correspondente ao dia e mês do seu nascimento, utilizando dois dígitos para o dia e dois dígitos para o mês.

Neste momento deve dar-se a indicação que é necessário colocar um zero no algarismo das dezenas, quando o número correspondente ao dia ou ao mês for inferior a dez.

Tomando como exemplo 11 de agosto (oitavo mês ou mês 08), o número será 1108.

Esse número não é revelado ao Mentalista. Seguem-se uma série de instruções dadas pelo Mentalista que incluem as operações a realizar:

1º) Calcular o dobro do número;

2º) Adicionar 5 unidades ao resultado obtido;

3º) Multiplicar a soma obtida por 50;

4º) Adicionar ao produto obtido o número formado pelos dois últimos dígitos do ano em que nasceu.

5º) Por fim, revelar ao Mentalista o número obtido.

A partir do número que lhe é dado, o Mentalista deve subtrair-lhe 250 unidades. O resultado obtido no final é composto pelo dia, mês e ano de nascimento do participante.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

Seja $\overline{dm}$ o número registado pelo participante em que d representa o dia e m representa o mês da sua data de nascimento. (Consultar nota da página 38). Note-se que d e m podem ser números formados por um ou dois algarismos. No caso de serem formados por um algarismo, deve-se colocar um zero no algarismo das dezenas.

Assim, pode-se escrever:

$$\overline{dm} = 100d + m$$

A partir este número, efetuam-se os cálculos indicados pelo Mentalista:

1º) $(100d + m) \times 2 = 200d + 2m$

2º) $200d + 2m + 5$

3º) $(200d + 2m + 5) \times 50 = 10000d + 100m + 250$

4º) Seja a o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento do participante.

$$10000d + 100m + 250 + a$$

5º) O número obtido no 4º passo é revelado ao Mentalista.

Por fim, o Mentalista subtrai 250 ao número que lhe foi revelado.

Assim, obtém: $10000d + 100m + 250 + a - 250 = 10000d + 100m + a$

A data de nascimento do participante será $\overline{dma}$.

Exemplo

Suponhamos que a data de aniversário do voluntário é 11 de agosto de 1946.

O número que deve ser registado pelo participante é 1108.

Seguindo os passos indicados pelo Mentalista:

1º) $1108 \times 2 = 2216$

2º) $2216 + 5 = 2221$

3º) $2221 \times 50 = 111050$

4º) $111050 + 46 = 111096$

5º) Pergunte qual o número obtido.

Por fim, o Mentalista subtrai 250 ao número que lhe foi dado. A diferença obtida representa: o primeiro ou os dois primeiros algarismos, o dia do nascimento, os dois algarismos seguintes, o mês e os dois últimos algarismos denunciam o ano do nascimento.

Continuando com o exemplo, o participante diria que o resultado é 111096.

Neste momento, o Mentalista faz o seguinte cálculo:

$$111096 - 250 = 110846.$$

Conclui-se que a data de nascimento é: $11/08/46$, ou seja, 11 de agosto de 1946!

Dicas

Também neste truque a música do "Parabéns a você" poderá ajudar a captar a atenção da audiência.

3.6. Adivinhar o algarismo que sobra

Objetivo

Adivinhar o algarismo que falta, após a eliminação dos restantes algarismos que formam o número que corresponde ao produto obtido da multiplicação de vários fatores.

Material usado

Calculadora, quadro branco e marcador.

Recursos Humanos

Mentalista e voluntário do público.

Descrição resumida

O Mentalista escolhe aleatoriamente um voluntário do público e pede-lhe para pensar num número com um ou mais algarismos e registá-lo na calculadora, sem o revelar. Em seguida, pede para que ele efetue, na calculadora, o produto desse número por um número qualquer entre 2 e 9. Esta etapa repete-se, sucessivamente, multiplicando sempre o produto obtido por um fator à escolha entre 2 e 9. À medida que o voluntário do público vai determinando os produtos, deve dizer em voz alta os fatores que vai escolhendo. Os fatores escolhidos podem ser repetidos, e podem ser sugeridos por diferentes elementos do público.

A dada altura, o Mentalista manda o voluntário parar e pede-lhe para ele escrever no quadro o número obtido, sem que o Mentalista o possa ver. O Mentalista dá indicação ao voluntário para que ele elimine desse número todos os zeros lá existentes. Depois, o voluntário vai dizendo em voz alta os números, pela ordem que quiser. Deixa apenas um último algarismo por dizer! Este é então, o algarismo que o Mentalista vai adivinhar.

Explicação matemática

Recurso a um exemplo

O voluntário pensa no número 24. Regista este número na calculadora e inicia o cálculo sucessivo de multiplicações.

Vamos considerar que após realizar as seguintes operações:

$$24 \times 3 \times 5 \times 4 \times 7 \times 8 \times 2 \times 9$$

o Mentalista manda parar.
O voluntário escreve no quadro o produto obtido: 1451520.

Seguindo as indicações dadas pelo Mentalista, o voluntário elimina os zeros (que neste caso é apenas o último algarismo e portanto não altera em nada a sequência dos algarismos). Depois, começa a dizer os algarismos, pela ordem que pretender, em voz alta e, donde pode surgir a seguinte lista de números:

5; 1; 1; 5; 4.

Deixa apenas por dizer um último algarismo, que neste caso é o 2, que o Mentalista terá que adivinhar.

À medida que estes algarismos são ditos em voz alta, o Mentalista vai adicionando-os, determinando o resto da divisão dos resultados obtidos (maiores ou iguais a 9) por 9.

Assim, neste caso obtém-se:

$$\mathbf{5} + \mathbf{1} = 6$$
$$6 + \mathbf{1} = 7$$
$$7 + \mathbf{5} = 12$$
$$12 = 3\ (mod\ 9)$$
$$3 + \mathbf{4} = 7$$

Nota: Os algarismos que se encontram a negrito são os da lista apresentada acima.

Finalizada esta etapa, o Mentalista determina a diferença entre 9 e o resultado obtido. A diferença corresponde ao algarismo que falta adivinhar. Neste caso,

$$9 - 7 = 2.$$

O número que falta adivinhar é o 2!

Fundamentos matemáticos

Uma das etapas fundamentais na execução desta habilidade passa pela escolha dos fatores utilizados no cálculo do produto. Esses fatores têm que ser ditos em voz alta pois o Mentalista vai mandar parar o cálculo apenas depois de terem sido usados os fatores 3, 6 ou 9, nas seguintes combinações:

$$3 \times 3; \quad 3 \times 6; \quad 6 \times 3; \quad 6 \times 6 \quad \text{ou} \quad 9.$$

Deste modo, tem-se a garantia que o produto obtido é múltiplo de 9.

Atendendo à Proposição 2.2 (ver página 38) e ao Critério de divisibilidade por 9 e respetiva demonstração (ver página 38), pode-se concluir que ao adicionar todos os algarismos, pela ordem em que aparecem, terá que se obter um múltiplo de 9. Assim, no momento em que falta apenas o último algarismo por identificar, basta determinar a diferença entre 9 e a última soma obtida.

Dicas

"Jeipardy Theme" poderá ser um exemplo de fundo musical para utilizar durante a realização deste truque.

3.7. Palavra do Livro

Objetivo

Adivinhar uma palavra selecionada de um livro.

Material usado

Livro, envelope com cartão, quadro branco e marcadores.

Recursos Humanos

Mentalista, DJ e voluntário do público

Descrição resumida

No início da sessão o Mentalista escolhe “aleatoriamente” uma palavra de um livro e escreve-a num papel, guardando-o num envelope fechado, entregando-o a alguém do público que seja idóneo. Para não dar a ideia que o Mentalista está a conduzir o voluntário para a palavra que ele próprio escolheu, a palavra do livro pode ser escolhida por outra pessoa, por exemplo, pelo Apresentador, que pode escolher e escrever a palavra.

Do público é escolhido um voluntário, a quem é lançado o desafio de adivinhar a palavra escondida.

Para tal, o Mentalista pede ao voluntário do público que escolha 3 algarismos diferentes, com os quais forma um número com 3 algarismos (X). Depois o voluntário deve inverter a ordem dos algarismos do número escolhido (Y). Em seguida, é calculada a diferença dos dois números, ao maior subtrai-se o menor dos números ($X - Y$ ou $Y - X$, dependendo de qual dos dois é maior, e identifica-se por Z). Por fim, o voluntário deve inverter novamente a ordem dos algarismos da diferença obtida (W) e adicionar os dois números ($Z + W$).

Finalmente, o resultado deverá ser utilizado, como código, para descobrir o número da página, o número da linha e a posição da palavra na linha.

Este resultado contém 4 algarismos e o Mentalista deve orientar o voluntário a usar os 2 primeiros para fazer corresponder ao número da página, o seguinte para o número da linha e o último para a posição ocupada na referida linha. O voluntário procura a palavra respetiva à posição descrita e revela-a à audiência.

Para terminar o truque o Mentalista pede à pessoa que guardou o envelope que se dirija junto deles e mostre o que está escrito no papel.

A palavra que se encontra escrita na folha que estava guardada dentro do envelope é, inevitavelmente, a palavra encontrada no livro!

Explicação matemática

Recurso a um exemplo

O voluntário escolhe o número 157. O número invertido é 751. Calcula a diferença entre 751 e 157. Obtém a diferença 594. Adiciona-lhe o número invertido, 495. Obtém a soma 1089.

$$751 - 157 = 594$$
$$594 + 495 = 1089$$

Acontece que, qualquer que seja a escolha inicial do voluntário, o resultado final é sempre 1089. De forma discreta, o mágico deve levar o voluntário a escolher a página 10, a linha 8 e a 9ª palavra dessa linha.

Fundamentos matemáticos

Considere um número formado por três algarismos diferentes pertencentes ao conjunto $\{0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Sejam $x, y, z \in \{0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, os algarismos escolhidos pelo voluntário do público. A partir do número $\overline{xyz}$, em que $x > z$, calcula-se a diferença entre $\overline{xyz}$ e $\overline{zyx}$. (Consultar nota da página 38)

Passa-se a apresentar o cálculo da diferença entre $\overline{xyz}$ e $\overline{zyx}$ recorrendo ao algoritmo da subtração por compensação.

Este algoritmo tem por base o *Teorema da Invariância do Resto*, que diz que, numa subtração, se adicionarmos o mesmo número ao aditivo e ao subtrativo a diferença não se altera.

$$\begin{array}{c c|c|c}
 & x & y^{+10} & z^{+10} \\
- & z^{+1} & y^{+1} & x \\
\hline
 & x-z-1 & 9 & z-x+10 \\
+ & (z-x+10)^{+1} & 9 & x-z-1 \\
\hline
 & 10 & 8 & 9
\end{array}$$

<u>Cálculos Auxiliares</u>:

Como $x > z$, tem que se adicionar 10 unidades a z para se poder calcular a diferença.

$$(z + 10) - x = z - x + 10$$

Como o algarismo das dezenas do subtrativo (y) recebeu 1 unidade, por transporte da diferença entre os algarismos das unidades tem que se adicionar 10 unidades ao algarismo das dezenas do aditivo.

$$(y+10)-(y+1)=y-y+10-1=9$$

Como $x>z$, a diferença entre os algarismos das centenas é obtida do seguinte modo:

$$x-(z+1)=x-z-1$$

Em seguida, inverte-se novamente a ordem dos algarismos do resultado obtido na diferença e adicionam-se os números.

O algarismo das unidades obtém-se do seguinte modo:

$$(z-x+10)+(x-z-1)=z-z-x+x+10-1=9$$

O algarismo das dezenas é a soma de 9 com 9. Obtém-se a soma 18. Sendo assim, é transposta 1 unidade para o algarismo das centenas de uma das parcelas.

$$x-(z+1)+10+z-x+1=x-z-1+10+z-x+1=10$$

Conclui-se, portanto que qualquer que seja o número escolhido, seguindo este algoritmo, obtém-se sempre o mesmo resultado: 1089.

É claro que se podem fazer variações e fazer corresponder este número à página 108 e à palavra que se encontra na 9ª posição dessa página. Para tal, a palavra que fica guardada no envelope e que é escondida antecipadamente terá que ser em conformidade com esta decisão.

Se se pretender que a palavra escolhida seja a que se encontra na página 10, linha 8 e 9ªposição, então deve-se ter o cuidado de escolher um livro ou que não tenha 108 páginas ou que nessa página não se encontre nada escrito na posição indicada. Assim pode-se orientar o voluntário para que a opção seja a que se pretende.

Dicas

Um exemplo de um livro que a maioria dos alunos destas faixas etárias conhece e gosta é o livro do Harry Potter. Como tal, pode-se optar, neste caso, por utilizar como música de fundo a banda sonora do respetivo filme.

3.8. Adivinhar o pensamento coletivo I

Objetivo

Adivinhar qual a imagem escolhida por todos os elementos do público.

Material usado

Grelha com imagens, computador, projetor e bola de cristal (opcional).

Recursos Humanos

Mentalista, DJ e todo o público

Descrição

O Mentalista dirige-se ao público avisando que o momento que se segue exige uma enorme concentração de todos, alertando para o perigo que podem correr. Neste momento o DJ pode colocar uma música de fundo que ajude à concentração da audiência. Fica como simples sugestão, as seguintes referências: *"Hatha Yoga Music"* ou *"Guiness World Record"*. Posto isto, pede aos elementos do público para pensarem num número até 24, e fixarem-no, não o partilhando com ninguém.

De seguida pede-lhes para calcularem o dobro do número em que pensaram. Em seguida, devem adicionar 6 unidades ao número obtido. Posteriormente, pede-lhes para determinar metade da soma obtida. Por último devem calcular a diferença entre o número obtido e o número fixado inicialmente.

Neste momento é projetada uma grelha com figuras.

Figura 31: Grelha com figuras (para aplicar a alunos do 2º ao 6º ano de escolaridade)

O público deve procurar na grelha, representada na Figura 36, qual a figura que corresponde ao número que obteve após os cálculos efetuados.

O Mentalista depois de consultar a bola de cristal e de muita concentração, adivinha que a figura que corresponde ao número em que cada um pensou é o lápis.

Figura 32: Lápis

O Mentalista diz ao público que eles devem estar a pensar que ele só adivinhou por mera coincidência. Sugere então que se repita todo o processo, mudando algumas das operações para que o resultado não seja 3 (ver Tabela 9).

Número escolhido	a
Operação: Multiplicar por 2	$2a$
Adicionar 6 (ou 8)	$2a + 6$ (ou $2a + 8$)
Dividir por 2	$a + 3$ (ou $a + 4$)
Subtrair o número escolhido	3 (ou 4)

Tabela 9

Os elementos do público pensam novamente num número e seguem todas as orientações dadas pelo Mentalista. Observam novamente a grelha projetada (que é diferente da primeira, facto que o público desconhece) e identificam a figura correspondente ao número que obtiveram.

Figura 33: Grelha com figuras, ordem alterada

Ao optar pela alternativa apresentada na Tabela 9 (somando 8 unidades no 3ºpasso e subtraindo 4 unidades no último), a figura encontrada por todos os elementos do público já será a correspondente ao número 4, logo será a borboleta.

Figura 34: Borboleta

Este processo pode ser repetido as vezes que se quiser, desde que se tenham preparado tabelas com diferentes figuras nas posições adequadas, e com alterações nas indicações dadas pelo Mentalista no que diz respeito aos cálculos a efetuar.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

Considere-se o número a, escolhido aleatoriamente pelos elementos do público. Seguindo as orientações do Mentalista, observa-se que o resultado obtido é sempre 3 (ou 4), como se pode comprovar pelos cálculos apresentados na Tabela 9.

Podem-se fazer variações nos cálculos alterando apenas o número adicionado, tendo em conta que no final se irá sempre obter metade desse número. Também se pode multiplicar por 3, adicionar um múltiplo de 3 e dividir por 3. (ver Tabela 10)

Número escolhido	a
Operação: Multiplicar por 2	$2a$ (ou $3a$)
Adicionar x	$2a + x$ (ou $3a + x$)
Dividir por 2	$a + \frac{x}{2}$ (ou $a + \frac{x}{3}$)
Subtrair o número escolhido	$\frac{x}{2}$ (ou $\frac{x}{3}$)

Tabela 10

O Mentalista só terá que verificar, na tabela apresentada, qual a figura correspondente a metade (ou um terço) do número que pediu para ser adicionado ao dobro (ou ao triplo) do número escolhido. Note-se que o número que o Mentalista pede para adicionar (x) deve ser um número par (ou múltiplo de 3).

Para que o ambiente criado seja propício e envolva todo o público num espírito de misticismo poderá ser interessante colocar música de fundo e diminuir a intensidade das luzes da sala.

No momento em que o Mentalista adivinha o número pode ser útil ter uma bola de cristal à sua frente, o que poderá contribuir de forma positiva para a encenação do truque.

Em vez de ser consultada a bola de cristal, o Mentalista pode simular a transmissão de pensamento para o elemento do grupo que se encontra no computador, para que ele possa selecionar corretamente a figura que o público obteve e projetá-la.

As tabelas usadas neste truque encontram-se em anexo, para reprodução, na página 211.

3.9. Adivinhar o pensamento coletivo II

Este truque é uma versão alternativa do truque anterior destinado a um público de faixa etária superior.

Para o caso deste truque ser destinado a alunos do 3º ciclo ou do secundário, sugere-se que se usem as seguintes tabelas, onde as imagens são as mais adequadas à faixa etária do público a que se destina a apresentação.

Apesar dos cálculos envolvidos neste truque causarem a ilusão do resultado ser aleatório, para um público de maior faixa etária corre-se o risco de perceberem o funcionamento do truque, dada a sua simplicidade.

Assim, sugere-se que se utilize um outro procedimento que envolve o conceito de "Múltiplos de 9", e que apesar dos cálculos serem de dificuldade reduzida, o resultado obtido varia entre os múltiplos de 9 e o procedimento utilizado não é tão imediatamente percetível.

Objetivo

Adivinhar qual a imagem escolhida por todos os elementos do público.

Material usado

Grelha com imagens, computador, projetor e bola de cristal (opcional).

Recursos Humanos

Mentalista, DJ e todo o público

Descrição

O Mentalista pede ao público para pensar num número de dois algarismos, ou seja, entre 10 e 99, inclusive. Em seguida, pede para que adicionem os dois algarismos do número em que pensaram e, de seguida, subtraiam essa soma ao número em que pensaram inicialmente. Pede para que fixem o resultado obtido.

BIMBO 1	Coca-Cola 2	Compal 3	DANONE 4	iglo 5	Mimosa 6	Nestlé 7	NOBRE 8	OLÁ 9	BIMBO 10	Coca-Cola 11	Compal 12
DANONE 13	iglo 14	Mimosa 15	Nestlé 16	NOBRE 17	OLÁ 18	BIMBO 19	Coca-Cola 20	Compal 21	DANONE 22	iglo 23	Mimosa 24
Nestlé 25	NOBRE 26	OLÁ 27	BIMBO 28	Coca-Cola 29	Compal 30	DANONE 31	iglo 32	Mimosa 33	Nestlé 34	NOBRE 35	OLÁ 36
BIMBO 37	Coca-Cola 38	Compal 39	DANONE 40	iglo 41	Mimosa 42	Nestlé 43	NOBRE 44	OLÁ 45	BIMBO 46	Coca-Cola 47	Compal 48
DANONE 49	iglo 50	Mimosa 51	Nestlé 52	NOBRE 53	OLÁ 54	BIMBO 55	Coca-Cola 56	Compal 57	DANONE 58	iglo 59	Mimosa 60
Nestlé 61	NOBRE 62	OLÁ 63	BIMBO 64	Coca-Cola 65	Compal 66	DANONE 67	iglo 68	Mimosa 69	Nestlé 70	NOBRE 71	OLÁ 72
BIMBO 73	Coca-Cola 74	Compal 75	DANONE 76	iglo 77	Mimosa 78	Nestlé 79	NOBRE 80	OLÁ 81	BIMBO 82	Coca-Cola 83	Compal 84
DANONE 85	iglo 86	Mimosa 87	Nestlé 88	NOBRE 89	OLÁ 90	BIMBO 91	Coca-Cola 92	Compal 93	DANONE 94	iglo 95	Mimosa 96

Figura 35: Grelha com figuras (3º ciclo)

Depois de consultar a bola de cristal e de muita concentração, o Mentalista observa a Figura 35 e adivinha que a figura que corresponde ao número que cada um pensou é a do "*Olá*".

Figura 36

Para que não fique a sensação que o Mentalista adivinhou por mera coincidência, ele sugere então que se repita todo o processo. Os elementos do público pensam novamente num número e seguem todas as orientações dadas pelo Mentalista. Observam novamente a grelha projetada (que é diferente da primeira, facto que o público desconhece) e identificam a figura correspondente ao número que obtiveram.

Figura 37: Grelha com figuras (3ºCiclo), ordem alterada

A figura obtida é "*Nestlé*".

Figura 38

Este processo pode ser repetido as vezes que se quiser, desde que se tenham preparado tabelas com diferentes figuras nas posições adequadas. Segue-se um outro exemplo de tabela com figuras diferentes, possivelmente mais ajustada aos alunos do Ensino Secundário.

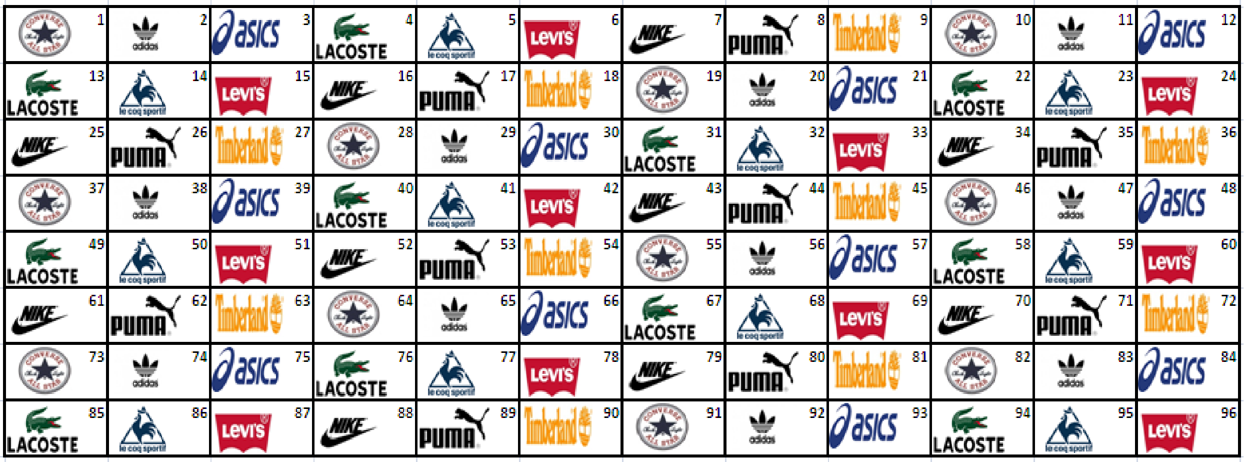


Figura 39: Grelha com figuras (Secundário)

Nota: Todas as tabelas apresentadas neste truque encontram-se disponíveis em anexo para reprodução.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

Considere-se o número a, entre 10 e 99, inclusive, escolhido aleatoriamente pelos elementos do público.

Seja $\overline{DU}$ esse número. De seguida, cada participante deve subtrair o algarismo das dezenas e o das unidades ao número em que pensou. Seguindo estas orientações, observa-se que o resultado obtido é sempre múltiplo de 9, como se pode comprovar pelos cálculos apresentados a seguir.

Note-se que:

$$\overline{DU} = 10D + U$$

Logo,

$$(10D + U) - (D + U) = 10D + U - D - U = 9D$$

Para confundir o público, basta utilizar grelhas com a ordem das figuras alterada, garantindo apenas que as figuras correspondentes aos múltiplos de 9 são sempre iguais.

Em anexo encontram-se para de tabelas alternativas ajustadas a cada faixa etária. (ver páginas 212 a 218)

3.10. Cenários com prémios

Objetivo

Realizar um concurso, no qual, em cada nível, o Mentalista adivinha em que posição de uma tabela 3×3, o voluntário não está.

Material usado

Computador com imagem projetada e/ou cartões com as imagens para fixar num quadro (com íman ou *bostik*, por exemplo) e um peão para percorrer os cartões.

Recursos Humanos

Apresentador, Mentalista, Palhaço e voluntário do público

Descrição resumida

O Mentalista convida um voluntário do púbico a participar neste truque. Pede-lhe para observar a imagem que está projetada (Figura 40) e situar-se, usando por exemplo um ponteiro, na casa de partida. No caso de se utilizar os cartões fixados num quadro, usar o peão para ir fazendo o percurso.

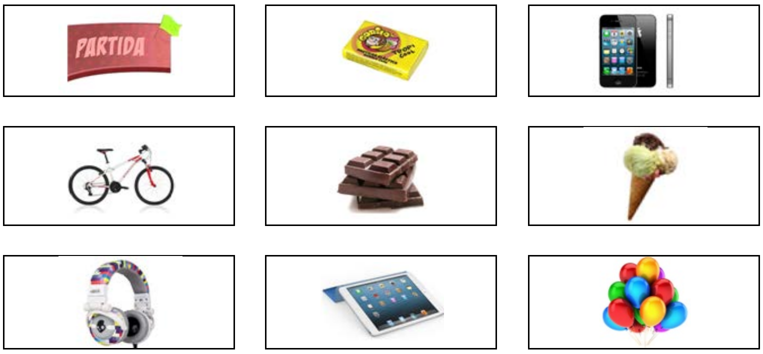


Figura 40: Imagem projetada/afixada com prémios

Nota: Esta tabela está disponível, em anexo, para reprodução.

De seguida, chama o Palhaço e diz-lhe que ele terá que dizer ao voluntário números à sorte, que irão corresponder ao número de casas que o participante se deve deslocar. É importante referir que os movimentos só se podem realizar na horizontal e na vertical, apenas para casa contíguas.

O Mentalista vira-se de costas, e com os olhos vendados, de modo a que fique bem claro para todo o público que ele não consegue ver a imagem projetada, nem os movimentos feitos pelo voluntário do público. A partir daqui, o Apresentador irá ajudar o voluntário a não cometer movimentos proibidos e a cumprir o número de passos que for escolhido, de cada vez.

À medida que o Palhaço vai dizendo os números, o voluntário desloca-se esse número de casas e mantém-se nessa casa. O Mentalista vai adivinhando, a cada paragem, uma casa onde o participante não está. Caso acerte (e acerta sempre) essa casa será retirada do quadro. Assim, e por exclusão sucessiva das casas onde não se encontra o participante, o Mentalista acaba, no final da sequência de números indicada pelo Palhaço, adivinhar onde se encontra o voluntário do público.

O Mentalista tem que ter o cuidado de não eliminar casas que se situem entre duas. Por exemplo, se eliminar a casa com a bicicleta, o participante não poderá passar da casa com os auscultadores para a casa da entrada, ou vice-versa, o que iria comprometer o sucesso do truque.

Explicação matemática

Para este truque as imagens que se encontram na Figura 40 são pouco significativas, pois podem variar consoante o público a que se destina a apresentação deste truque. Vamos considerar a mesma tabela mas com os quadrados com as cores a alternar entre branco e preto (à semelhança de um tabuleiro de xadrez, ver Figura 41) e numeradas de 1 a 9.

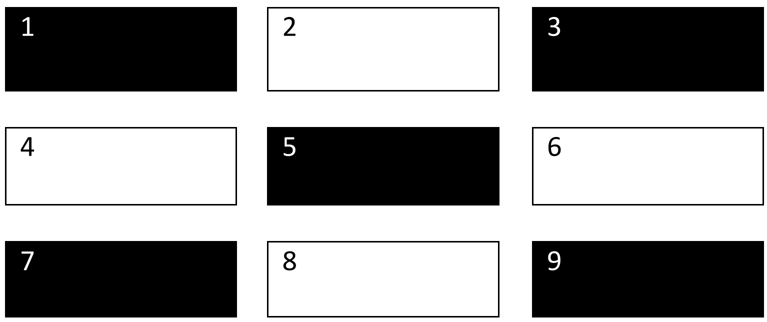


Figura 41: Tabela semelhante ao tabuleiro de xadrez

O voluntário começa o seu percurso na casa com o número 1 (correspondente à casa de partida na Figura 40).

Neste truque, importa notar que quando o número indicado pelo Palhaço é um número par, o voluntário ao deslocar-se esse número de casas, irá parar numa casa com a mesma cor da casa em que se encontrava antes. Caso o número indicado pelo Palhaço seja um número ímpar, a casa onde o voluntário irá parar terá uma cor diferente da casa onde se encontrava.

Desta forma, é sempre possível saber quais as casas em que o voluntário não se encontra. Servindo-se desta lógica, o Palhaço poderá dizer os números que desejar, desde que a paridade tenha sido previamente acordada com o Mentalista. Para facilitar a tarefa pode escolher uma sequência de casas (e correspondente paridade dos números) para ir dizendo. Por exemplo, pode escolher a seguinte sequência de paridades:

Ímpar/ Ímpar/Par/ Ímpar

Par/Par/ Ímpar/Par

É claro que deve transmitir ao público a sensação de ter usado números completamente aleatórios.

À medida que o voluntário se vai deslocando o número de casas indicadas pelos números ditos pelo Palhaço, o Mentalista, em cada uma das paragens, vai adivinhando onde é que o participante não está, eliminando essa casa. Essa sequência de casas eliminadas pode ser:

Casa 9 / Casa 6 / Casa 4 / Casa 7 / Casa 3 / Casa 2 / Casa 8

Após a eliminação sucessiva das casas onde o participante não se encontra, e por exclusão de partes, o Mentalista adivinha que o Voluntário terminou o seu percurso na Casa 5.

Dica

Para o truque parecer mais aleatório, em vez de ser o Palhaço a dar indicação dos números a serem usados pelo voluntário, a escolha desses números pode ser feita a partir da escolha de cartas pelo púbico. No entanto, antes da realização do truque, devem ser preparados dois montes de cartas, um com números pares e outro com números ímpares. O Palhaço deve ter apenas a preocupação de ir alternando o monte usado de modo a garantir a sequência que tinha sido definida anteriormente:

Ímpar/ Ímpar/Par/ Ímpar

Par/Par/ Ímpar/Par

Neste truque pode ser usada uma música qualquer de um concurso televisivo, com fundo musical.

3.11. Dados empilhados

Objetivo

Adivinhar a soma das pintas escondidas em 3 dados empilhados.

Material usado

3 dados de tamanho gigante (se possível, mais de 10 cm de aresta), 21 fósforos, quadro branco e marcadores.

Recursos Humanos

Mentalista, Apresentador, DJ e voluntário do público

Descrição resumida

O Mentalista vira-se de costas, pedindo ao voluntário do público que coloque os 3 dados empilhados. Em seguida, pede-lhe para adicionar e registar no quadro os valores das duas faces contíguas do dado do meio e do de cima. O Apresentador deve acompanhar a execução das operações por parte do voluntário, de modo a garantir que não há erro de cálculos. Depois faz o mesmo cálculo em relação aos valores das faces contíguas do dado do meio e do de baixo e regista essa soma no quadro. Por fim, adiciona aos dois valores anteriores o valor da face inferior do dado de baixo.

Para dificultar a sua tarefa, o Mentalista pede ao voluntário para lhe dizer apenas, e em voz alta, o número de pintas que se encontram na face superior do dado e, em seguida, pede-lhe que coloque um pano por cima dos dados, para que fiquem totalmente tapados.

O Mentalista volta-se rapidamente de costas para o voluntário do público e tira do bolso uma mão cheia de fósforos que entrega ao voluntário, pedindo-lhe que ele faça a sua contagem. Ouve-se o som do rufar de tambores e, verifica-se que o número de fósforos entregues ao voluntário coincide com o resultado da adição das cinco faces escondidas dos dados empilhados.

Explicação matemática

Para este truque é de extrema importância realçar o fato de que a soma dos valores das faces opostas de qualquer dado é sempre 7 (*Princípio do sete*).

A indicação do número de pintas que se encontram na face superior do dado é fundamental para o Mentalista determinar a soma do número de pintas existentes nas faces escondidas dos dados.

O Mentalista finge estar a fazer cálculos e raciocínios complicadíssimos, mas na verdade ele apenas tem que determinar a diferença entre 21 (resultado da adição das faces opostas do 3 dados) e o número de pintas correspondente a face superior do dado de cima. Depois do cálculo efetuado, e atendo ao facto de ele ter no seu bolso 21 fósforos, resta-lhe apenas retirar do bolso, o número de fósforos correspondente ao valor da soma das cinco faces escondidas, que não é nem mais nem menos que deixar ficar no bolso o número de fósforos correspondente ao número de pintas que se encontram na face superior do dado de cima.

Note-se que, o facto de ser pedido ao voluntário do público para adicionar os valores das faces contíguas entre os dados empilhados e não as opostas do mesmo dado, serve para esconder o uso do *Princípio do sete*.

Recurso a um exemplo

O voluntário coloca três dados empilhados, obtendo por exemplo o seguinte:

Figura 42: Três dados empilhados

Atendendo ao exemplo da Figura 42, observa-se que o número da face superior do dado de cima é o 5, sendo assim, a sua face oposta é o 2 (*Princípio do sete*). O mesmo se verifica em todos os outros dados, isto é, a soma dos números que se encontram nas faces opostas de dois dados é sempre 7. Sendo 3 dados, a soma final é 21.
Ora se a 21 se subtrair o número da face superior do dado de cima (5) obtém-se o resultado 16, que equivale a adicionar os cinco números das faces escondidas.
Neste momento o Mentalista pega nos 21 fósforos que tem antecipadamente preparados no bolso e retira o número correspondente ao da face superior do dado de cima.

Sugestões

Este truque pode ser adaptado às diferentes faixas etárias. Para o Nível 1 (Pré-escolar e 1º ano), pode ser utilizado apenas 1 dado em que é adivinhado apenas o número escondido na face inferior do dado. A partir do momento que os alunos já sabem contar atém 20, já se podem usar dois dados. No Nível 2 (do 2º ao 4ºano) podem ser usados 3 ou 4 dados. Daí em diante usar sempre 4 ou mais dados.

3.12. Adivinhar o total

Objetivo

Adivinhar o total obtido pelo voluntário, após o lançamento de três dados.

Material usado

3 dados, quadro branco e marcadores.

Recursos Humanos

Mentalista, DJ e voluntário do público

Descrição resumida

O Mentalista vira-se de costas enquanto um voluntário do público lança 3 dados sobre a mesa.

Em seguida vai-lhe dando as seguintes indicações:

- Adiciona os valores das faces voltadas para cima dos três dados;
- Pegando em qualquer um dos três dados, adiciona o valor da face inferior desse dado à soma obtida no passo anterior;
- Lança de novo esse dado;
- Adiciona ao total anterior o valor da face voltada para cima do dado que foi lançado.

O Mentalista salienta que não tem como saber qual dos três dados foi de novo lançado.

Volta-se para os dados e, antes de pegar neles, adiciona os valores das faces superiores dos três dados. Por fim, adiciona 7 à soma que obteve. O resultado obtido corresponde à soma fixada pelo voluntário do público.

Explicação matemática

Note-se que dois dos dados estão fixos desde o início.

Em relação ao terceiro dado, foram adicionadas três parcelas, em que duas delas correspondem a duas faces opostas do dado, valor esse cuja soma é sempre sete, e o terceiro valor é o que fica exposto, após o novo lançamento.

Deste modo, se o Mentalista adicionar 7 (valor resultante da soma das faces opostas de qualquer dado) aos valores das faces superiores dos três dados, obtém-se sempre a soma obtida após os cálculos efetuados pelo voluntário do público.

Exemplo

Considere-se que os valores correspondentes às faces voltadas para cima nos três dados lançados pelo voluntário do público são, por exemplo: 3; 5 e 2.

O voluntário do público deverá adicionar os três valores:

$$3 + 5 + 2 = 10.$$

Em seguida, escolhe um dos dados e adiciona ao resultado anterior (10) o valor da face voltada para baixo desse mesmo dado (face oposta). Suponhamos que foi escolhido o dado cuja face superior tem o número 3. Logo adiciona-se 4 (valor da face oposta) ao 10:

$$10 + 4 = 14.$$

Por último, o voluntário do público lança de novo este dado. Suponhamos que se obteve o valor 6 nesse lançamento. Adiciona-se este valor à soma anterior:

$$6 + 14 = 20.$$

Note-se que, após o segundo lançamento de um dos dados, os números que estão nas faces superiores dos três dados são 5, 2 (dados fixos desde o início) e o 6 (valor obtido aquando do segundo lançamento). Quando o Mentalista se volta, adiciona, mentalmente, esses três valores:

$$6 + 5 + 2 = 13.$$

Por fim, adiciona 7 a esse resultado:

$$13 + 7 = 20.$$

Obtém deste modo o mesmo resultado obtido pelo voluntário do público.

Fundamentos Matemáticos

Considere x, y e z como sendo os valores correspondentes às faces voltadas para cima de cada um dos três dados lançados.

Adicionando-se os três valores, obtém-se:

$$x + y + z.$$

Escolhe-se o dado com o valor x na face superior. Adiciona-se o valor da face oposta a x, isto é, adiciona-se $7 - x$, à soma obtida anteriormente:

$$(x + y + z) + (7 - x) = y + z + 7.$$

O voluntário lança este dado de novo. Considere-se que o valor obtido é w. Adiciona-se este valor á soma anterior:

$$(y + z + 7) + w.$$

Designe-se esta soma por A.

Note-se que dois dos dados estão fixos desde o início, com os valores respetivos y e z.

Quando o Mentalista se vira, adiciona os três valores das faces voltadas para cima dos dados, sendo $(y + z) + w$ essa soma. Ao adicionar 7 a este resultado obtém-se o valor obtido pelo voluntário, A.

Dica

O fundo musical utilizada neste truque poderá ser também “Jeopardy Theme”.

Capítulo 4

4. Truques com cartas

Já existem registos de truques com cartas desde o século XVII, sendo que os primeiros livros que se dedicam em exclusivo a estes truques datam do século XIX. Desde 1900, a magia com cartas tem evoluído bastante, existindo hoje inúmeros truques matemáticos, que são extremamente engenhosos, como também possuem grande valor como entretenimento (Gardner, 1991). Neste capítulo podem-se encontrar alguns desses truques.

4.1. Cinco cartas

Objetivo

Adivinhar uma carta que está escondida no público e que foi escolhida a partir dum grupo de cinco cartas selecionadas de um baralho, aleatoriamente, pelo público.

Material usado

Baralho de cartas "King size" (cartas em formato A4 ou A5).

Suporte para colocar 4 cartas (ou 4 pessoas para segurar as cartas).

Recursos Humanos

Mágico e Ajudante do Mágico (que pode ser o Apresentador), DJ e 1 a 5 voluntários do público.

Descrição resumida

O Mágico coloca uma venda nos olhos. Em seguida, pede-se ao público que selecione, aleatoriamente, 5 cartas a partir de um baralho. Das cinco cartas selecionadas o Ajudante do Mágico escolhe convenientemente uma delas que devolve ao público para que seja escondida. As restantes 4 cartas são dispostas (usando um código) de maneira a que o Mágico consiga adivinhar a carta escondida. Algumas cartas são colocadas de costas outras de frente. O Mágico retira a venda e rapidamente adivinha a carta escondida.

Explicação detalhada

Fundamentos Matemáticos

O "*Princípio do Pombal*" garante que em cinco cartas há pelo menos duas do mesmo naipe. Se imaginarmos quatro caixas, cada uma a representar um naipe, vemos que cinco cartas têm necessariamente de mostrar pelo menos uma repetição. A carta escondida no público é necessariamente uma das cartas com naipe repetido.

Para que o Mágico consiga adivinhar o valor da carta escondida, o Mágico e o seu Ajudante definem um código. Na 2ª posição (da esquerda para a direita) é colocada, pelo Ajudante do Mágico, outra carta do mesmo naipe da carta escondida. O Mágico fica assim a conhecer o naipe da carta escondida com facilidade. As três cartas, que ocupam as 1ª, 3ª e 4ª posições, codificam um número na base dois, o qual deverá ser adicionado ao valor da carta que se encontra na 2ª posição.

É indiferente a posição ocupada pelas três cartas, interessa apenas se estão colocadas de costas ou de frente (0 ou1).

A ordem estabelecida anteriormente pelo Mágico e pelo seu Ajudante é a seguinte:

$$\text{Ás}=1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < \text{Dama}=11 < \text{Valete}=12 < \text{Rei}=13 ,$$

a qual deve ser pensada de forma cíclica.

Note-se que se tivermos duas cartas diferentes elas estarão, no máximo, a uma distância de seis uma da outra, se a sequência for cíclica.

Ao devolver a carta ao público, o Ajudante entrega a "maior" (ver explicação abaixo sobre o cálculo da distância entre duas cartas) das cartas de naipe repetido, relativamente à ordem anterior. As três cartas restantes, que irão ocupar a 1ª, 3ª e 4ª posições usam-se para, em binário (0 = carta de costas, 1 = carta de frente), dizer quantas unidades se deve "subir" a partir da carta que se encontra na 2ª posição para atingir a carta escondida.

Exemplos

Exemplo 1: O voluntário retira as cinco cartas seguintes:

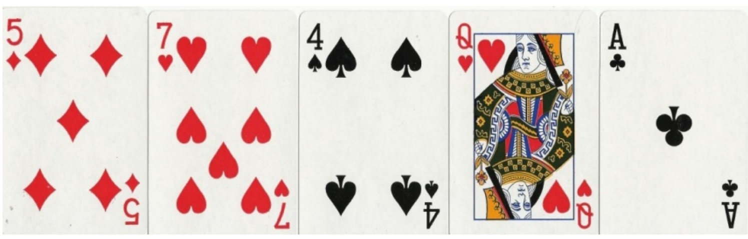


Figura 43

O Ajudante do Mágico sabe que deve escolher uma das cartas de naipe repetido. Terá de ser escolhida uma carta do naipe de copas. Na ordem descrita antes, a distância mais curta entre as duas cartas de copas é que vai desde o 7 até à dama (11), e essa distância é 4. O Ajudante dá a dama de copas ao voluntário, que a esconde.

Das quatro cartas com que fica, o Ajudante coloca o 7 de copas na segunda posição, para que o Mágico conheça o naipe da carta escondida. Com as restantes 3 cartas o Mágico codifica o número 4 em código binário, $100_{(2)} = 2^2 = 4$.

Assim, o Ajudante deixa ao Mágico a seguinte configuração:

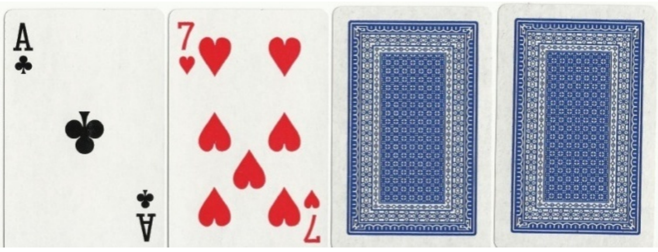


Figura 44

O Mágico não tem dificuldade em reconhecer que a carta escondida, tratando-se de uma carta de copas, se obtém somando 4 a 7, o que dá 11 que é o número de ordem das damas.

Exemplo 2: O voluntário retira as cinco cartas seguintes:

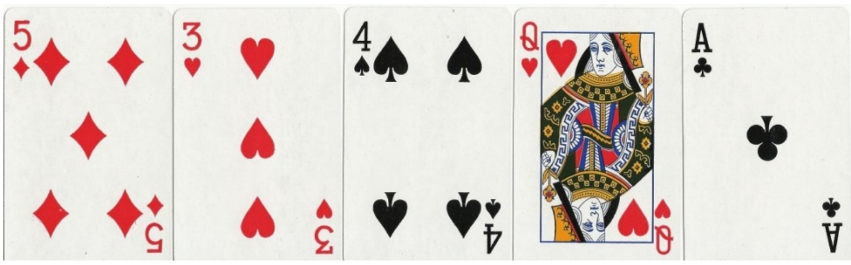


Figura 45

O Ajudante do Mágico sabe que deve escolher uma das cartas de naipe repetido. Terá de ser escolhida uma carta do naipe de copas. Na ordem descrita antes, a distância mais curta entre o 3 e a Dama é a que vai desde a Dama até ao 3, passando pelo Rei:

Dama=11 → Valete=12 → Rei=13 → Ás=1 → 2 → 3,

sendo esta distância de 5 unidades.

A distância do 3 até à Dama pela ordem natural seria 8, o que ultrapassa 7, que é o maior número que se pode codificar em binário só com 3 dígitos. Assim, neste caso, o Ajudante deixará com o voluntário do público a carta com o número 3.

Das quatro cartas com que fica, o Ajudante do Mágico coloca a Dama de copas na segunda posição, para que o Mágico conheça o naipe da carta escondida. Sobram três cartas para que o Mágico adivinhe qual a que está escondida.

Assim, o Ajudante deixa ao Mágico a seguinte configuração:

Figura 46

Usando o código definido entre o Mágico e o seu Ajudante, esta representação corresponde ao seguinte número no sistema binário: $101_{(2)} = 2^2 + 2^0 = 5$.

O Mágico não tem dificuldade em reconhecer que a carta escondida, é do naipe de copas e obtém-se adicionando 5 ao número de ordem da Dama, na ordenação cíclica, obtendo deste modo a carta com o número 3.

Dica

Neste truque sugere-se a utilização da música “Somebody that I used to know”, do Gotye, como música de fundo.

Tabela de correspondência entre Sistema Binário e o número de pontos a adicionar à carta escolhida, usando Potências de Base 2

Com três cartas podemos, usando numeração binária (costas=0, face=1), obter todos os números inteiros de 0 a 7:

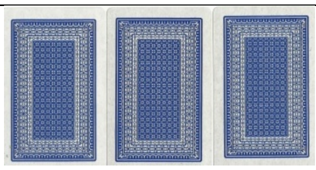
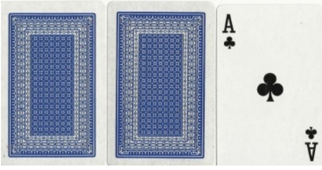
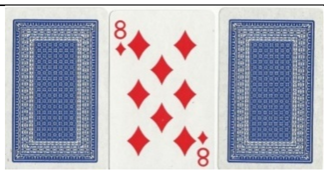
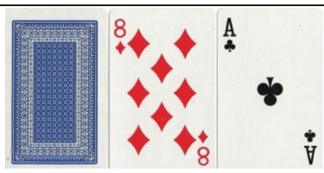
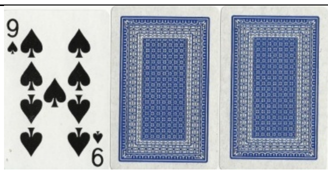
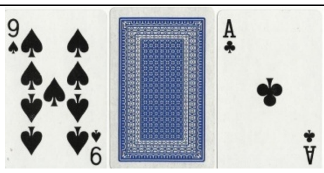
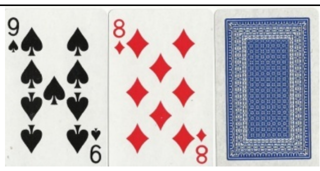
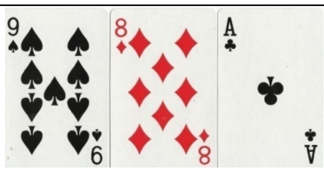
Nº de pontos a adicionar	**Posicionamento das três cartas restantes**	**Numeração Binária**	**Potências de base 2**
0		000	0
1		001	2^0
2		010	2^1
3		011	$2^1 + 2^0$
4		100	2^2
5		101	$2^2 + 2^0$
6		110	$2^2 + 2^1$
7		111	$2^2 + 2^1 + 2^0$

Tabela 11 – Conversão do número de pontos (base 10) para a base 2, que é indicada pela posição ocupada pelas três cartas

4.2. Cartas Baralhadas

Objetivo

Obter sequências de cartas: cartas com cores alternadas; cartas com os 4 naipes juntos; grupos com as 13 cartas diferentes (números e figuras todos diferentes, não sendo obrigatório, nesse grupo, serem todas do mesmo naipe).

Material usado

Baralho de cartas "king size" (cartas em formato A4 ou A5).

Recursos Humanos

Mágico, DJ e 2 voluntários do público

Descrição resumida

O Mágico escolhe duas pessoas do público, aleatoriamente. Mostra-lhes um baralho de tamanho "king size" e pede aos voluntários do público para o partir, um de cada vez.

Segura-se o baralho voltado para baixo e o Mágico vai retirando, uma a uma, as cartas do baralho inicial, colocando-as em cima da mesa. É pedido ao voluntário que diga quando é que acha que o baralho está dividido aproximadamente a meio. Neste momento, o baralho inicial passou a estar dividido em dois montes.

Em seguida, pede aos voluntários para baralhar as cartas usando o método americano (ver secção 2.5.2. da página 42).

O Mágico retira as duas cartas de cima e constata que são de cores diferentes. Em seguida vai mostrando cartas, duas a duas, e o público verifica que todos os pares de cartas retiradas são formados por cartas de cores diferentes.

A etapa seguinte consiste em retirar do baralho quatro cartas de cada vez. Neste caso obtém-se uma carta de cada naipe. A situação repete-se em cada quatro cartas que são sucessivamente retiradas.

Caso sejam retiradas treze cartas, obtém-se a sequência completa de cartas, do Ás até ao Rei, não necessariamente por ordem. Esta situação repete-se ao retirar sucessivamente treze cartas.

Para se passar a tirar 4 cartas com os 4 naipes diferentes é necessário garantir que foi retirado um número de cartas que seja múltiplo de 4. Já para retirar um grupo de 13 cartas diferentes, convém fazer o acerto até terem sido retiradas 26 cartas, correspondente ao meio do baralho, o que leva a que as restantes 26 cartas estão agrupadas em 2 grupos de 13 cartas diferentes.

Explicação matemática:

Recurso a um exemplo

Usar um baralho de cartas completo e realizar os passos seguintes:

1- Ordenar o baralho, previamente, alternando as cartas por cores (vermelha, preta, vermelha, preta, etc.). Esta preparação só permite garantir que as cores saiam alternadas. Para se conseguir agrupar os naipes, também previamente tem que se preparar o baralho, sendo assegurada a sequência dos 4 naipes diferentes (por exemplo: copas; espada; ouros e paus) do princípio ao fim do baralho. O mesmo se passa quando se pretende obter a sequência de 13 cartas diferentes. Antes, o baralho tem que ser preparado desse modo, repetindo quatro vezes essa sequência (por exemplo: 5; 2; R; 10; D; Ás; 3; V; 4; 7; 6; 8 e 9).

2- Se se pretender pode-se partir o baralho nesta altura do truque.

3- Com o baralho voltado para baixo, formar um monte, retirando as cartas, uma a uma, colocando-as em cima da mesa, até que o baralho inicial fique dividido aproximadamente a meio. Passam a existir dois montes.

4- Misturar o baralho usando o método americano. Como as cartas são grandes convém que sejam duas pessoas a realizar o baralhamento (os dois voluntários).

5- Por fim, retirar e mostrar as cartas, duas a duas. Obtém-se sempre uma carta de cada cor. Repetir o processo num total de 6 pares.

6- Em seguida, retirar e mostrar as cartas quatro a quatro. Obtém-se sempre um conjunto formado por uma carta de cada naipe: copas, ouros, espadas e paus. O processo deve ser repetido 3 vezes.

7- Neste momento devem ser mostradas mais 2 cartas, de modo a ser verificado que têm cores diferentes.

(Nota: garante-se assim que foram mostradas 26 cartas, o que corresponde a metade do baralho de cartas)

8- Por último, retiram-se e mostram-se 13 cartas de cada vez. Verifica-se que teremos em cada um dos dois conjuntos de treze cartas, todas as cartas do Às ao Rei, em que o naipe não interessa.

Fundamentos matemáticos

O princípio em que se baseia este truque é conhecido como *Princípio de Gilbreath*. Pode-se ler o seu enunciado no respetivo secção, que se encontra na página 48.
Mesmo ao baralhar, apenas uma única vez, a sequência pode alterar-se, mas não se altera a propriedade das cartas, 2 a 2, terem as duas cores; 4 a 4, terem os quatro naipes e 13 a 13, terem os treze números/figuras.

Dica

Neste truque sugere-se a utilização da música “Sexta-feira”, do Boss AC, como música de fundo.

4.3. Código do Aloquete

Objetivo

Adivinhar o código de 4 dígitos de um aloquete.

Material usado

Cartas (cartas de um naipe, do Ás ao nove), envelope com cartão, quadro branco e marcadores.

Recursos Humanos

Mentalista, DJ e 4 voluntários do público

Descrição resumida

Antes da sessão iniciar o Mentalista deve distribuir as cartas em três grupos de modo a que a soma dos valores correspondentes às cartas de cada grupo seja 15. Considere-se que o Às corresponde ao valor 1. Cada grupo de cartas é entregue a um voluntário diferente. O Mentalista refere que um dos voluntários ficará com os algarismos das centenas, o outro com os algarismos das dezenas e, o último, ficará com o algarismo das unidades. Os voluntários escolhem a ordem dos algarismos que pretendem ocupar.

Já durante a sessão, o Mentalista pede a alguém que lhe dê o seu anel, o qual será preso com um aloquete que será fechado com um código, que só o Mentalista conhece.

Em seguida, pede a colaboração de outro voluntário do público pedindo que ele adivinhe o código para poder libertar o anel. Perante a dificuldade apresentada pelo voluntário, o Mentalista sugere que ele diga 3 números, com 3 algarismos, sendo que, para cada um deles, o algarismo da ordem das centenas seja escolhido de entre as cartas do 1º voluntário (algarismo das centenas), o algarismo da ordem das dezenas seja escolhido das cartas do 2º voluntário (algarismo das dezenas) e o algarismo da ordem das unidades seja escolhido do 3ºvoluntário (algarismo das unidades), sendo que as cartas escolhidas não podem ser repetidas.

O Mentalista pede ao voluntário que adicione os três números.

Por fim, o Mentalista sugere que o voluntário utilize a soma para tentar abrir o aloquete. Constata-se que este abre de imediato!

Explicação matemática

Recurso a um exemplo

Para se conseguir com facilidade saber quais as cartas que devem ser entregues a cada um dos três voluntários que irão segurar nas cartas, de modo que os valores correspondentes às suas cartas perfaçam a soma 15, pode-se começar por construir um quadrado mágico (ver página 49) com as cartas, de modo a garantir, que a soma das pontuações referente a cada linha seja 15. Note-se que o valor atribuído ao Ás é 1, como já foi referido anteriormente.
Passa-se a apresentar um exemplo:

8	3	4
Ás	5	9
6	7	2

Figura 47

Deste modo, o 1º voluntário ficará com as cartas 8, 3 e 4; o 2º voluntário ficará com as cartas Ás, 5 e 9 e o 3º voluntário ficará com as cartas 6, 7 e 2, conforme indicado na Figura 53. A partir deste momento, é pedido ao 4º voluntário do público que diga 3 números com 3 algarismos cada um, sendo que, para cada um deles, o algarismo da ordem das centenas seja escolhido das cartas do 1º voluntário (1ª linha do quadrado mágico), o algarismo da ordem das dezenas seja escolhido das cartas do 2º voluntário (2ª linha do quadrado mágico) e o algarismo da ordem das unidades seja escolhido das cartas do 3º voluntário (3ª linha do quadrado mágico), sendo que as cartas escolhidas não podem ser repetidas.

Assim, os três números escolhidos são, por exemplo: 392; 417 (que corresponde às cartas 4, Ás, 7) e 856. A soma destes números é 1665. Este resultado é obtido para quaisquer outros números escolhidos, desde que se siga o procedimento indicado.

Fundamentos matemáticos

Uma vez que o quadrado mágico foi organizado de modo que a soma das linhas seja 15, fica garantido que a soma obtida dos algarismos de cada uma das ordens será 15.

Considerem-se as letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f, g, h, i,* correspondentes aos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, aleatoriamente.

Constrói-se o quadrado mágico de modo que a soma das linhas, colunas e diagonais seja 15.

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*I*

Figura 48

Garante-se que os três números escolhidos verificam a condição de que os algarismos da ordem das centenas são escolhidos da 1ªlinha do quadrado mágico, os algarismos da ordem das dezenas são escolhidos da 2ªlinha e os algarismos da ordem das unidades são escolhidos da 3ªlinha.

Procede-se de seguida à soma dos três números. Adicionando-se os algarismos das unidades obtém-se soma 15.

$$g + h + i = 15$$

O mesmo se verifica para a somas dos algarismos das dezenas e das centenas, respetivamente.

$$d + e + f = 15$$

$$a + b + c = 15$$

Note-se que para qualquer que seja a ordem escolhida pelo voluntário, basta usar a propriedade comutativa da adição para que o resultado seja o mesmo.

Recorrendo ao algoritmo da adição obtêm-se:

$$\begin{array}{cccc} & (a)^{+1} & (d)^{+1} & g \\ & b & e & h \\ + & c & f & i \\ \hline 1 & 6 & 6 & 5 \end{array}$$

Pode-se fazer uma variação deste truque, considerando três números apenas com 2 algarismos cada, sendo que o algarismo das dezenas é escolhido de uma das linhas e o algarismo das unidades de outra qualquer linha do quadrado mágico. Para tal, um dos voluntários deverá ser excluído.

Neste caso o resultado obtido será 165, e é útil para aloquetes com códigos de três dígitos.

Dica

Neste truque sugere-se a utilização da música “Somebody that I used to know”, do Gotye, como música de fundo.

4.4. A soma é 15!

Objetivo

Manipular cartas, aparentemente de forma aleatória, e obter no final, 3 conjuntos de 3 cartas cuja soma do valor correspondente a essas cartas seja sempre 15.

Material usado

Cartas (cartas de um naipe, do Ás ao nove, tamanho “king size”), quadro e bostik.

Recursos Humanos

Mentalista e 3 voluntários do público

Descrição resumida

Antes da sessão iniciar o Mentalista deve afixar as cartas no quadro, usando por exemplo bostik, de modo a formar um quadrado mágico. O facto de se ter construído um quadrado mágico não deve ser revelado. Mais uma vez, o Ás toma o valor 1.

8	3	4
Ás	5	9
6	7	2

Figura 49: Quadrado mágico cuja soma das linhas, colunas e diagonais é 15

Assim, o Mentalista inicia o truque explicando que vai retirar as cartas do quadro, coluna a coluna, seguindo a ordem de cima para baixo, como se demonstra na figura que se segue (Figura 50).

1º	4º	7º
2º	5º	8º
3º	6º	9º

Figura 50: Ordem pela qual se retiram as cartas

As cartas, à medida que vão sendo retiradas do quadro vão sendo colocadas num monte. O Mentalista pede a um voluntário do público que parta o baralho, onde quiser, e coloca o monte de cima por baixo do outro monte.

Em seguida, o Mentalista pede a colaboração de outros dois voluntários e distribui as cartas pelos três alternadamente, isto é, a 1ªcarta ao 1º voluntário, a 2ªcarta ao 2º voluntário, a 3ª carta ao 3º voluntário, a 4ªcarta volta a entregar ao 1º voluntário, e assim sucessivamente, até todas as cartas serem entregues. Cada voluntário terá que ficar com 3 cartas.

Por fim, pede a cada um dos voluntários que mostre as suas cartas e que calcule a soma dos valores correspondentes às cartas que tem na mão. Constata-se que cada um deles tem 3 cartas cujos valores correspondente adicionados levam a que a soma seja 15!

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

Para se perceber como funciona este truque, terá que se observar com atenção a Figura 56:

Ao se colocar as cartas pela ordem indicada na figura, obtém-se a seguinte sequência de ordens:

1º - 2º - 3º - 4º - 5º - 6º - 7º - 8º - 9º

No momento em que se corta o baralho, poderá eventualmente acontecer o seguinte:

Monte 1: 1º - 2º - 3º - 4º e **Monte 2:** 5º - 6º - 7º - 8º - 9º

Invertendo a ordem dos dois montes, passa-se a ter a seguinte ordem:

5º - 6º - 7º - 8º - 9º - 1º - 2º - 3º - 4º

Ao dividir as cartas alternadamente entre os três grupos, obtém-se a seguinte distribuição:

Grupo 1: 5º - 8º - 2º; **Grupo 2:** 6º - 9º - 3º e **Grupo 3:** 7º - 1º - 4º.

Voltando a observar a Figura 56 constata-se que cada grupo contém as cartas de cada um das linhas, pois a distância modular entre duas cartas consecutivas da mesma linha é sempre 3, e portanto, o facto de se cortar o baralho não vai alterar a distância modular das cartas. Como o truque se baseia na construção de um quadrado mágico de soma 15 (linhas, colunas e diagonais), então está garantido que a soma dos valores correspondentes às 3 cartas de cada um dos grupos formados será sempre 15.

4.5. Quadrado mágico diabólico

Objetivo

Construir um Quadrado Mágico Diabólico a partir de um número, maior que 20, escolhido pelo público.

Material usado

Cartas (cartas de um naipe, do Ás ao Valete), caixa transparente, papéis dobrados com números escritos (maiores que 20), quadro branco e marcadores.

Recursos Humanos

Mentalista, DJ, um voluntário e público em geral.

Descrição resumida

O Mentalista começa por pedir ao voluntário do público que escolha, à sorte e sem olhar, um dos papéis que se encontra dobrado dentro da caixa. Para mostrar que os números dentro da caixa são diferentes, o Mentalista pode optar por pedir ao voluntário que tire 3 papéis e mostre o resultado de cada um, em seguida escolhe um desses três.

Vamos supor que o número sorteado foi o 45.

Em seguida, e depois de registar no quadro o número selecionado pelo voluntário, o Mentalista desenha no quadro branco um quadrado 4×4, dizendo que este será preenchido com números indicados pelo público.

Neste momento, pega nas cartas dizendo que cada uma delas irá corresponder ao seu valor, à exceção do Ás que corresponderá ao valor 1, da Dama que assumirá o valor 11 e do Valete ao qual será atribuído o valor 12. Baralha as cartas, pede a uma pessoa qualquer do público para cortar o baralho, podendo também pedir para que este o baralhe também. Depois vai pedindo a cada pessoa do público, escolhida de um modo completamente aleatório, que retire, sem ver uma carta do baralho.

À medida que cada carta vai sendo escolhida, o Mentalista vai registando no quadrado 4×4, os respetivos valores. Deve passar a ideia que esses números são colocados completamente à sorte.

No final de todas cartas serem selecionadas, o quadrado deverá ter este aspeto:

	1	12	7
11	8		2
5	10	3	
4		6	9

Figura 51

Por fim, o Mentalista diz que vai escolher 4 números consecutivos, à sorte e, termina deste modo o preenchimento do quadrado.

Assim, ele escolhe os números 24, 25, 26 e 27, e preenche os restantes espaços do quadrado do seguinte modo:

25	1	12	7
11	8	24	2
5	10	3	27
4	26	6	9

Figura 52

É neste momento que o Mentalista começa a identificar, uma a uma, as várias formas possíveis de juntar números deste quadrado, verificando que todas elas perfazem a soma 45. (Ver essas possibilidades na página 49)

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

Há alguns aspetos a considerar no modo de preencher o quadrado.

Os números de 1 a 8 têm que ser agrupados, 2 a 2, de modo que a sua soma dê 9: 1 e 8; 2 e 7; 3 e 6, devendo ser colocados nas posições indicadas na figura Figura 51

Também os números de 9 a 12 ocupam os lugares definidos na Figura 51.

Seja X o número sorteado pelo voluntário do público. Para determinar os números que irão ocupar os espaços em branco no quadrado, o Mentalista calcula a diferença entre X e 20. Assim, seja $N = X - 20$.

Os espaços deixados em branco até este momento serão ocupados, respeitando as posições indicadas na Figura 59, pelos números N, $N - 1$, $N - 2$ e $N + 1$.

$\boldsymbol{N}$	**1**	**12**	**7**
11	**8**	$\boldsymbol{N-1}$	**2**
5	**10**	**3**	$\boldsymbol{N+2}$
4	$\boldsymbol{N+1}$	**6**	**9**

Figura 53: Quadrado Mágico Diabólico

É de notar que todas as formas possíveis de agrupar números neste quadrado irão conduzir ao resultado da soma igual a $N + 20 = X$. (ver página 49)

Dicas

Sugere-se a visualização deste truque realizado pelo mágico Luís de Matos em:

https://www.youtube.com/watch?v=4Pyt1i51fNo

https://www.youtube.com/watch?v=sYne991cPck

Além disso, propõe-se a consulta do site:

https://www.youtube.com/watch?v=NVx9xfOl10o

onde se pode visualizar uma explicação do truque do Quadrado Mágico Diabólico.

Como banda sonora sugere-se “Star Wars (Guerra nas estrelas) - trilha sonora, OFES, maestro adjunto: Leonardo David”.

4.6. A Herança

Objetivo

Dividir 7 cartas por 3 pessoas tendo em conta algumas condições.

Material usado

Um baralho de 52 cartas e um jóquer.

Recursos Humanos

Mágico, DJ e 3 voluntários do público

Descrição resumida

O Mágico começa por contar a seguinte história:

"*Há muitos, muitos anos, um sultão deixou no seu testamento a indicação de que, após a sua morte, todos os seus camelos deveriam ser distribuídos pelos seus três filhos: o mais velho receberia metade, o segundo a quarta parte e o mais novo a oitava parte. Quando o sultão morreu deixou 7 camelos, quantidade que não era divisível por dois, nem por quatro nem por oito. Os filhos foram pedir ajuda a um mago que se prontificou de imediato e até deu um dos seus camelos para facilitar a partilha. Assim, o mais velho recebeu quatro camelos (metade de 8), o segundo recebeu 2 camelos (a quarta parte de 8) e o mais novo dos irmãos ficou com um camelo (a oitava parte de 8). Depois de feita a distribuição, constataram que tinha sobrado um camelo. O mago, para além de ter ajudado os filhos do sultão, conseguiu ainda recuperar o seu camelo*".

O Mágico anuncia ao público que irá recrear a história com algumas das cartas do seu baralho. Assim, retira sete cartas que representarão os camelos do sultão e coloca-as sobre a mesa, com as faces voltadas para baixo, após mostrá-las ao público.

À semelhança do mago da história, o Mágico terá que acrescentar uma carta, que representará o camelo emprestado. Então vai buscar uma carta ao restante baralho, um jóquer, mostra-a ao público e coloca-a, face voltada para baixo, sobre o monte das sete cartas.

O Mágico solicita a ajuda de três voluntários para representarem os filhos do sultão. Ao "irmão mais velho", o Mágico entrega o monte das oito cartas, com as faces voltadas para baixo, e pede-lhe que realize um baralhamento "Monge" (explicar o procedimento com base na descrição da página 41). O Mágico recolhe o monte das 8 cartas e entrega-o ao "irmão do meio" que deverá, por sua vez, realizar um novo baralhamento "Monge". Por fim, o monte de cartas é novamente recolhido e entregue ao "irmão mais novo", que fará o mesmo procedimento dos outros.

O Mágico recolhe novamente as cartas, com as faces voltadas para baixo, e entrega ao “irmão mais velho” as quatro primeiras, a partir do topo, correspondendo aos camelos a que tem direito por herança. Ao “irmão do meio”, o Mágico entrega as duas cartas seguintes e ao “irmão mais novo”, a penúltima carta. A última carta fica para o Mágico. Este mostra-a ao público que confirma ser o jóquer.

Explicação matemática

O baralhamento “Monge” está na base deste truque. A carta colocada no topo do monte pelo Mágico, o jóquer, irá ficar, depois dos três baralhamentos, no fundo do baralho. Assim, o mágico só tem que distribuir as cartas pelos três espectadores e ficar com a última.

Este truque poderá ser interessante para explorar a noção de divisor de um número.

Dica

Pode ser usada a música “Jeopardy Theme”, como banda sonora para este truque.

4.7. Sou realmente um génio

Objetivo

Adivinhar uma carta fixada pelo voluntário.

Material usado

Um baralho de 52 cartas e um quadro.

Recursos Humanos

Mágico e voluntário do público.

Descrição resumida

O Mágico começa por escrever no quadro a frase “Sou realmente um génio”.

Depois, pede a um voluntário do público que parta o baralho sensivelmente a meio, escolha o monte mais pequeno e conte, em silêncio, as cartas que contém. O outro monte fica afastado.

O Mágico pede ao voluntário que adicione, mentalmente, os dois algarismos do número de cartas do seu monte. Suponhamos que ele contou 24 cartas. Adiciona o 2 ao 4, o que dá 6.

De seguida, o Mágico pede-lhe que memorize a carta que se encontra na posição correspondente a essa soma, a partir do fundo do monte que tem na sua mão.

O Mágico pede ao voluntário que coloque o seu monte em cima do monte que se encontra na mesa, endireite o baralho e o que lho entregue.

O Mágico começa a distribuir as cartas, a partir do topo, soletrando ao mesmo tempo e em voz alta a frase “S-O-U-R-E-A-L-M-E-N-T-E-U-M-G-É-N-I-O”, à razão de uma letra por cada carta dada. Ao acabar de soletrar a frase, a última carta corresponde à carta memorizada pelo voluntário.

Explicação matemática

O procedimento descrito coloca sempre a carta visualizada pelo voluntário na décima nona posição a contar do topo do baralho. Por isso, o final de qualquer frase com 19 letras terminará necessariamente na carta pretendida. O baralho de cartas ao ser cortado sensivelmente a meio leva a que cada um dos dois montes fique com um número de cartas que deverá estar compreendido entre 20 e 29.

Seja x o algarismo das unidades. O número de cartas do seu monte será $20 + x$. O voluntário faz a soma dos dois algarismos, ou seja, $2 + x$. Como é pedido que veja a carta situada nessa posição a partir do fundo do seu monte, haverá sempre acima dessa carta:

$$20 + x - (2 + x) = 20 + x - 2 - x = 18 \text{ cartas.}$$

Logo a carta pretendida ocupará a décima nona posição.

Ao dividir mais ou menos a meio o baralho de cartas, o monte mais pequeno deverá ficar com um número de cartas compreendido entre 20 e 26. Neste truque é importante que o monte escolhido não exceda as 29 cartas, mas tenha mais de 19 cartas. Por isso, é conveniente pedir ao voluntário para escolher o monte mais pequeno, já que meio baralho tem 26 cartas, havendo mais hipóteses entre 20 e 26 do que entre 26 e 29.

Muitos truques baseiam-se no facto de que, somando os dois algarismos de um número e subtraindo o total assim obtido ao número original, se obtém sempre um múltiplo de nove. (ver página 40)

4.8. A prova dos nove

Objetivo

Adivinhar um número escrito pelo voluntário.

Material usado

Um baralho de 52 cartas; calculadora, papel e lápis.

Recursos Humanos

Mentalista e voluntário do público.

Descrição resumida

O Mentalista pede a um voluntário que escreva num papel um número com quatro algarismos diferentes. Pede-lhe que adicione os quatros algarismos e faça a diferença entre o número inicial e a soma obtida. O Mentalista entrega um baralho de cartas ao voluntário e pede-lhe que retire, às escondidas, quatro cartas correspondentes aos algarismos da diferença obtida. O Mentalista refere que as quatro cartas devem ser de naipes diferentes e que para corresponder ao algarismo zero deve escolher uma carta com o número 10.

Por exemplo, para 1845, tira um Ás de copas, um oito de espadas, um quatro de ouros e um cinco de paus.

O Mentalista pede ao voluntário que fique com uma dessas cartas, sem ser um 10, e que lhe entregue as restantes. O Mentalista anuncia qual é a carta escondida pelo voluntário.

Explicação matemática

Adivinhar o naipe é imediato, por exclusão de partes. Quanto ao valor da carta, o Mentalista deverá adicionar o valor das três cartas (o 10 conta como zero) e procurar o diferencial para chegar a um múltiplo de nove. Esse número será o valor da carta escondida!

Observação: Se a soma obtida for um múltiplo de 9, a carta escondida será um nove.

Seja x o algarismo das unidades de milhar, y o algarismo das centenas, z o algarismo das dezenas e w o algarismo das unidades. Temos que o número escolhido pelo voluntário, no sistema de base 10, é

$$1000x+100y+10z+w.$$

A diferença entre o número inicial e a soma dos quatro algarismos pode ser representada pela seguinte expressão algébrica:

$$1000x + 100y + 10z + w - (x + y + z + w) =$$

$$= 1000x + 100y + 10z + w - x - y - z - w =$$

$$= 1000x - x + 100y - y + 10z - z + w - w =$$

$$= 999x + 99y + 9z =$$

$$= 9(111x + 11y + z)$$

Esta expressão representa um múltiplo de 9. Ora, um número é múltiplo de 9, se e só se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de nove, pelo que a carta escondida terá que ter valor correspondente ao que falta para obter um múltiplo de 9 quando se somam os valores das 3 cartas visíveis, como se pretendia mostrar. Como o nove e o zero são ambos múltiplos de 9, convém garantir que um deles nunca é o escolhido pelo voluntário. Por esse motivo é que é pedido ao voluntário para excluir a carta com o 10 (correspondente ao zero) da escolha inicial.

4.9. A bola de cristal

Objetivo

Adivinhar o número com dois algarismos correspondentes aos valores das duas cartas retiradas pelo voluntário.

Material usado

Um baralho de cartas (depois de serem retirados os 10 e as cartas com figuras) e calculadora.

Recursos Humanos

Mágico, DJ e voluntário do público.

Descrição resumida

O Mágico pede a um voluntário que baralhe as cartas e retire duas delas sem olhar para elas, colocando-as numa mesa voltadas para baixo. O resto do baralho fica de lado.

Em seguida, pede ao voluntário para ver apenas uma das cartas e decorar o número (o naipe não interessa) e voltar a colocá-la em cima da mesa. Por sua vez, o Mágico vê a outra carta, volta a virá-la e coloca-a à direita da do voluntário.

O Mágico explica que as duas cartas representam um número com dois algarismos (a do voluntário representa o algarismo das dezenas e a do Mágico o das unidades) e que a calculadora será usada como se fosse uma bola de cristal, para adivinhar esse número.

O Mágico entrega a calculadora ao voluntário e pede-lhe que:

- Escreva o número da carta que escolheu;
- Multiplique esse número por dois;
- Adicione dois ao resultado;
- Multiplique esse resultado por cinco;
- Subtraia o Número Mágico (é a diferença entre 10 e o número da carta vista pelo Mágico).

O Mágico pede então ao voluntário que vire as duas cartas que estão em cima da mesa. O número com dois algarismos compostos pelas duas cartas será igual ao número que aparece no visor da calculadora.

Explicação matemática

O truque é fácil de explicar com um pouco de álgebra.

Seja x o algarismo das dezenas (número da carta do voluntário) e y o algarismo das unidades (número da carta do Mágico). O número formado pelas duas cartas, no sistema de base 10, é $10x + y$.

As operações que são indicadas pelo Mágico e efetuadas pelo voluntário na calculadora conduzirão à seguinte expressão algébrica:

$$5(2x + 2) - (10 - y)$$

que simplificada é

$$10x + 10 - 10 + y = 10x + y,$$

que é precisamente o número formado pelas duas cartas.

Dica

Aconselha-se a utilização de temas de meditação para banda sonora deste truque.

4.10. Encontrar o amor

Objetivo

Fazer coincidir duas metades de uma carta

Material usado

Baralho de cartas, 8 cartas King Size (tamanho A4).

Recursos Humanos

Mágico, Palhaço, DJ e voluntários do público (número a definir antecipadamente).

Descrição resumida

O Mágico explica que este truque nos vai dizer se iremos ou não encontrar o amor verdadeiro.

O Palhaço começa por distribuir 4 quaisquer cartas de um baralho a cada um dos participantes do público. (Se usar um baralho de 52 cartas, poderá ter 13 voluntários a participar simultaneamente no truque). O Mágico e o Palhaço também seguram, cada um deles, 4 cartas, tamanho king size, para que as cartas possam ser vistas por todo o público. O Mágico pede para que todos baralhem as cartas que lhes foram entregues. Em seguida, diz para segurarem nas cartas horizontalmente e dobrá-las a meio, de modo a fazer um vinco que permita com facilidade rasgar as cartas por essa dobra. É exatamente isso que o mágico pede em seguida, que as cartas sejam rasgadas, em conjunto, colocando um dos montes obtidos em cima do outro. Cada pessoa passa a ter 8 pedaços de cartas nas mãos.

À medida que o truque vai sendo explicado pelo Mágico, o Palhaço vai realizando as várias etapas, dramatizando as situações.

O Mágico dá as seguintes indicações aos intervenientes no truque:

1º) Pegar na carta de cima e colocá-la em baixo do monte;

2º) Passar as duas cartas de cima para baixo do monte;

3º) Retirar as 3 cartas de cima e colocá-las em qualquer sítio, no meio do monte;

4º) Colocar a carta de cima guardada junto ao coração;

5º) Pegar em 1, 2 ou 3 cartas de cima e coloca-las em qualquer sítio no meio do monte;

6º) Pegar na carta de cima e trocá-la com alguém (O Mágico diz que pode ser trocada com a pessoa que mais gosta ou com a que mais detesta, e troca a sua carta com a do Palhaço);

7º) A carta que é recebida é colocada em qualquer sítio no meio do monte;

8º) Pede para os intervenientes escolherem entre uma carta (se a sua vida amorosa é muito boa), duas cartas (se a sua vida amorosa é muito má) ou três cartas (se a sua vida amorosa é espetacular) e atirar fora esse número de cartas (sendo que essas cartas são retiradas do cimo do monte);

9º) Pegar no baralho e, ir deslocando uma a uma, as cartas de cima para baixo, dando-lhes o nome dos dias da semana, de 2ºFeira até domingo (o que perfaz a contagem de 1 a 7).

Posto isto, o Mágico explica o jogo que se segue, cada interveniente irá pegar na carta que se encontra em cima do monte e repetindo a frase dita pelo Mágico: “bem me quer” ou “mal me quer”, realiza, respetivamente, as ações de colocar a carta por baixo do monte ou atirar a carta fora, até ficar apenas com uma carta na mão.

Os intervenientes no truque nunca devem ver as cartas que têm na mão.

Por fim, o Mágico explica que se a carta que cada um tem na mão for a metade correspondente à carta que têm guardada junto ao coração, então o amor verdadeiro será encontrado!

Neste momento cada um deve ver as duas metades de carta que deverão encaixar.

Caso alguém não tenha conseguido obter as duas metades correspondentes da carta, o Mentalista pode brincar com a situação, perguntando:

“Não consigo entender porque é que a tuas cartas não correspondem! Será que é por não teres conseguido seguir uma pequena lista de instruções elementares? Não é, pois não? Como vai a tua vida de amores??? “

Explicação matemática

As quatro cartas iniciais são baralhadas, e só depois é que são cortadas a meio. Considere-se que as 4 cartas, depois de baralhadas, são identificadas com as letras A, B, C e D, sendo que metade da carta está identificada com a letra maiúscula e a outra metade com a respetiva letra minúscula (ver Figura 54).

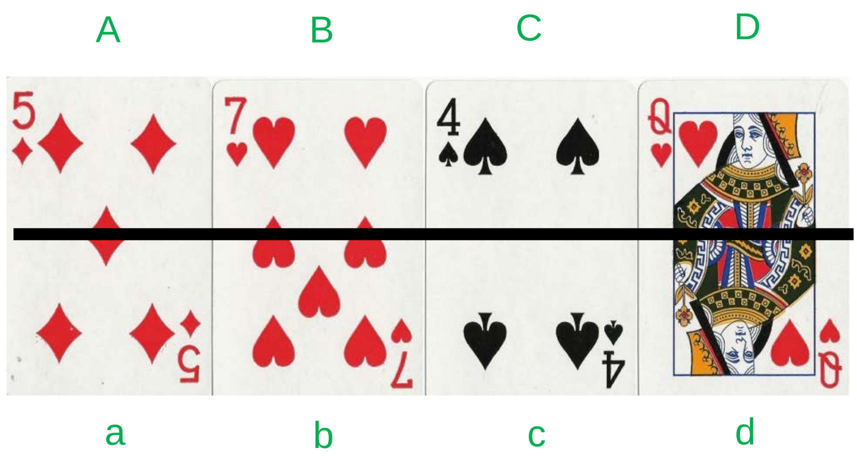


Figura 54

As metades identificadas com as letras maiúsculas ficam todas juntas e as que têm as letras minúsculas formam também, um grupo que não se separa, obtendo-se a sequência de cartas: ABCDabcd.

Seguem-se as indicações dadas pelo Mágico, que vão originando as seguintes alterações na sequência anterior:

- Carta de cima passa para baixo do monte: BCDabcd**A**.
- 2 cartas de cima passam para baixo do monte: DabcdA**BC**.
- 3 cartas de cima colocadas em qualquer sitio do meio do monte (várias hipóteses possíveis):

c**Dab**dABC;   cd**Dab**ABC;   cdA**Dab**BC;   cdAB**Dab**C.

Note-se que em todas as opções obtidas, a 1ªcarta do monte está identificada com a letra “c” e a última com a letra “C”. Esta é a parte crucial do truque. Quase todo o resto é só para divertir.

- Guardar a carta de cima junto ao coração: esta carta é sempre a carta identificada com a letra “c”.

Neste momento cada interveniente tem 7 cartas na mão e 1 carta guardada, sendo que a carta guardada coincide com a carta que está em baixo do monte.

Os passos seguintes em nada alteram a posição ocupada pela carta identificada com a letra C, que permanecerá na última posição:

- Escolher 1, 2 ou 3 cartas (cartas de cima do monte) e colocá-las no meio do monte;
- Trocar a carta de cima com alguém;
- Colocar carta recebida em qualquer posição no meio do monte;
- Deitar fora 1, 2 ou 3 cartas que se encontram no cimo do monte.

No final desta etapa, cada interveniente terá 6 cartas na mão (caso tenha deitado fora 1 carta), 5 cartas (caso tenha deitado fora 2 cartas) ou 4 cartas (caso tenha deitado fora 3 cartas), sendo que em todos os casos, a carta identificada com a letra "C" é a última carta do monte. A carta identificada com a letra "c" continua guardada.

Sejam estas as representações correspondentes às três possibilidades descritas:

X X X X X C;   X X X X C;   X X X C,

Sendo que "X" representa um carta qualquer diferente de "C".

Segue-se a fase em que as cartas são rodadas, de cima para baixo, uma a uma, repetindo-se o processo 7 vezes.

Disposição Inicial	X X X X X C	X X X X C	X X X C
1ªrotação	X X X X C X	X X X C X	X X C X
2ªrotação	X X X C X X	X X C X X	X C X X
3ªrotação	X X C X X X	X C X X X	C X X X
4ªrotação	X C X X X X	C X X X X	X X X C
5ªrotação	C X X X X X	X X X X C	X X C X
6ªrotação	X X X X X C	X X X C X	X C X X
7ªrotação	X X X X C X	X X C X X	C X X X

Tabela 12

Assim, os que ficaram com 6 cartas, têm a carta identificada com a letra "C" na 5ªposição; os que ficaram com 5 cartas têm a carta "C" na 3ªposição; e, os que ficaram com 4 cartas, têm a carta "C" na 1ªposição,

Por fim, mais um jogo é realizado em conjunto. Alternando, carta a carta, de cima para baixo, são ditas duas frases "bem me quer" e "mal me quer". Relativamente à primeira frase, a carta de cima é colocada em baixo do monte, quando é dita a 2ªfrase, a carta de cima do monte é deitada fora.

Disposição Inicial	X X X X C X	X X C X X	C X X X
Bem me quer	X X X C X X	X C X X X	X X X C
Mal me quer	X X C X X	C X X X	X X C
Bem me quer	X C X X X	X X X C	X C X
Mal me quer	C X X X	X X C	C X
Bem me quer	X X X C	X C X	X C
Mal me quer	X X C	C X	C
Bem me quer	X C X	X C	
Mal me quer	C X	C	
Bem me quer	X C		
Mal me quer	C		

Tabela 13

Note-se que em todos os casos, a carta obtida no final é sempre a carta identificada com a letra “C”.

É este o momento de juntar as duas metades de carta, a que estava guardada, identificada com a letra “c” e a que se obteve no final do processo aqui descrito, identificada com a letra “C”. É claro que deverão corresponder uma à outra, desde que os passos tenham sido bem executados.

Dicas

É de todo o interesse a visualização do vídeo que se encontra em:

https://www.youtube.com/v/65UY8A2_VqQ?start=1930&end=2399

onde se pode assistir à execução deste truque pelos mágicos Penn & Teller, no programa “Fool us”, com toda a encenação envolvente que torna este truque bastante mais rico.

Para criar o ambiente adequado à realização deste truque, a sugestão musical é “Now we are free”, da banda sonora do filme “Gladiator”.

4.11. A vermelhinha

Objetivo

Localizar a única carta vermelha de um baralho de 3 cartas.

Material usado

Baralho de cartas.

Recursos Humanos

Mentalista e público.

Descrição resumida

O Mentalista, com a ajuda de outros elementos da equipa do circo, entregam ao público três cartas, sendo uma delas vermelha e as restantes pretas. Os elementos do público devem segurar as três cartas, com as faces voltadas para baixo, colocando a carta vermelha no topo.

O Mentalista refere que embora, neste momento, todos tenham conhecimento da posição ocupada pela carta vermelha, o baralho será apenas baralhado por cada um dos elementos do público, e o objetivo será o Mentalista descobrir onde está a carta vermelha.

O Mentalista refere que é impossível ele conhecer cada uma dos elementos do público, e muito menos os seus nomes. Assim, informa o público que será utilizando o nome próprio de cada um, que o baralhamento das três cartas será feito, explicando que cada letra do seu nome corresponde a movimentar uma carta de cima do baralho para baixo do mesmo. O procedimento deve ser feito em silêncio, para que o Mentalista não tenha a perceção do número de letras que compõe o nome usado por cada um dos elementos do público. Para aumentar a dificuldade do truque, o Mentalista pede ao voluntário que repita o processo mais duas vezes.

Em seguida, e para que este processo se torne mais aleatório, e porque é preciso magia para adivinhar a localização da carta vermelha, o Mentalista pede agora ao público que repita o procedimento usado, utilizando para tal a palavra “MAGIA”.

Terminado o baralhamento, o Mentalista pede a cada um para ver a carta que está em cima do baralho. O Mentalista concentra-se e anuncia que essa carta não é vermelha. O público confirma. Pede então ao público que descarte essa carta e que observe a carta que se encontra agora em cima do baralho. Mais uma vez, o mágico concentra-se e anuncia que essa carta é vermelha. O público confirma!

Explicação matemática

Recurso a um exemplo

Sejam estas as três cartas escolhidas por dos voluntário do público, que são colocadas por esta ordem, sendo que a carta vermelha ocupa a posição de cima do baralho (1ªposição), e as cartas pretas ocupam a 2ª e a 3ª posição.

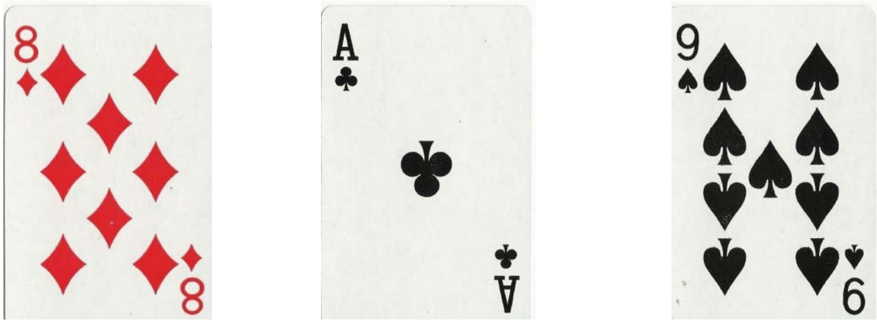


Figura 55: Ordem inicial das três cartas

Suponhamos que o voluntário do público se chama António. O seu nome tem 7 letras. Ao realizar a rotação da carta vermelha da 1ª para a 3ªposição, 7 vezes seguidas, e repetindo o processo 3 vezes, que podem ser ou não seguidas, fica garantido que a carta vermelha volta para a posição inicial, a 1ªposição.

Ao fazer, em seguida a rotação usando agora a palavra “MAGIA”, palavra esta, que contém 5 letras, a carta vermelha irá ocupar no final a 2ªposição.

Figura 56: Ordem final das três cartas

Fundamentos Matemáticos

Verifica-se que, se o número de letras que compõe o nome do voluntário for um múltiplo de três, a cada baralhamento realizado, o monte de cartas volta à sua configuração inicial. Nos restantes casos, são necessários três baralhamentos para que isso aconteça. Portanto, o

Mentalista sabe que os três baralhamentos, executados com base no nome próprio do voluntário do público, manterão a carta vermelha no topo.

A palavra escolhida pelo Mentalista é essencial para o posicionamento final da carta vermelha. Neste truque, o Mentalista utilizou a palavra MAGIA, para colocar a carta vermelha na posição central.

Esta situação ocorrerá sempre que for utilizada uma palavra com $(3n-1)$ letras, qualquer que seja o número natural n. Se o objetivo for posicionar a carta vermelha no fundo do monte então a palavra a utilizar deverá ter $(3n-2)$ letras. Se o Mentalista preferir manter a carta vermelha no topo, deverá utilizar uma palavra com $3n$ letras.

A ordem pela qual o Mentalista realiza o procedimento é aleatória, isto é, os três baralhamentos com base no nome próprio do voluntário podem ser intercalados, a qualquer momento com o baralhamento realizado com base na palavra escolhida pelo Mentalista, sendo que esta só é realizada uma única vez.

Capítulo 5

5. Truques de Topologia

O interveniente principal dos truques que se apresentam em seguida é o Contorcionista, pela sua participação ativa. Neste capítulo "Truques com Topologia", em que as habilidades realizadas têm por base os princípios referidos na página 54, e que dizem respeito ao manuseamento de objetos que são topologicamente equivalentes, como por exemplo a utilização da Fita de *Möbius* (ver página 55).

5.1. Braços Cruzados

Objetivo

Fazer um nó numa corda, segurando as pontas da mesma, sem nunca as soltar.

Material usado

Corda

Recursos Humanos

Contorcionista e 1 voluntário do público

Descrição

Existem vários truques com nós. Para fazer o nó é necessário apenas uma corda. Primeiro mostra-se ao participante um nó simples. Aquele nó que se faz no primeiro momento em que vai fazer um laço de um sapato, conforme Figura 57 a). Em seguida, desfaz-se o nó e pede-se ao participante para segurar, da forma que quiser, nas duas pontas da corda e tentar fazer o nó, mas com um detalhe, ele não pode em nenhum momento soltar as pontas das mãos.

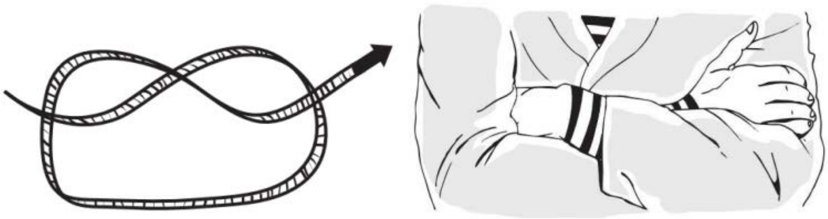


Figura 57: a) Um nó simples. b) Posição dos braços a manter para pegar nas pontas da corda, de modo a conseguir fazer o nó na mesma.

Deixa-se o participante a experimentar durante algum tempo. Em seguida, o Contorcionista pergunta ao participante se ele está a ficar aborrecido por não estar a conseguir. Sugere que cruze os braços (referindo que por norma é a posição que tomamos quando desistimos de fazer qualquer coisa e começamos a ficar chateados), e que pegue nas pontas da corda, sem descruzar os braços. Só neste momento é que deve descruzar os braços, mantendo as pontas seguras. Vai notar que se começa a formar, na corda, o nó que se pretende, à medida que os braços se vão descruzando.

Este truque também pode ser feito pelo Palhaço que por vezes surpreende conseguindo resolver problemas que não se espera que consiga.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

É impossível, numa curva fechada (simples, sem nenhum cruzamento) fazer cruzar a corda, que compõe essa curva, sobre si mesma. Para tal, uma possibilidade é transferir um nó já existente. Para isto basta segurar a corda como as mãos dispostas na Figura 57 b). Note que quando os braços estão cruzados, já existe um nó. E portanto o truque consiste em transferir um nó já existente para a corda.

5.2. Folha ao contrário

Objetivo

Virar uma folha do avesso, utilizando um recorte no interior da mesma, sem largar a folha.

Material usado

Papel de feltro ou outro tipo de material resistente, cartolina, tesoura, colete ou bata amarelos e chifres para o touro (opcional).

Recursos Humanos

Contorcionista, Palhaço, DJ e 2 voluntários do público (toureiro e amigo do toureiro)

Descrição

O Contorcionista pede a colaboração de dois voluntários do público. Começa por definir o papel desempenhado por cada um dos intervenientes na encenação da tourada. Dá indicação que o Palhaço fará o papel de touro, um dos voluntários fará o papel de toureiro e o outro será o amigo do toureiro, que terá a função de o ajudar. Opcionalmente, o Palhaço pode colocar uns chifres na cabeça. O que faz papel de toureiro veste uma bata, ou colete, amarela, com a folha (papel de feltro) colada na parte da frente.

A folha tem duas faces, uma cor-de-rosa e outra amarela, e deve estar inicialmente com a face cor-de-rosa voltada para a frente.

O Contorcionista informa os participantes que se o touro vir a face cor-de-rosa vai ter de atacar e o amigo do toureiro, para o salvar, terá que virar o papel, pois deste modo, o touro irá parar de atacar.

Tem, no entanto, uma limitação: tem que virar a folha ao contrário, sem que esta se solte do toureiro, até porque a folha está colada ao colete que ele tem vestido. A ideia é virar a folha do avesso, sem a rasgar ou desprender do colete.

Perante esta explicação, o touro começa a ameaçar o ataque e o amigo do toureiro vai tentar voltar a folha para o lado amarelo, utilizando as dobras que a folha apresenta.

Depois de os deixar tentar algumas vezes, o Contorcionista vai dando instruções, passo a passo, para que o toureiro, o seu amigo e todo o público, percebam o processo que ele está a descrever.

As fotografias seguintes ilustram o processo a utilizar.

1º Passo: A folha está fixada (ver pontos assinalados na Figura 58), podendo estar colada (usando cola quente, por exemplo) ou agrafada num colete (ou bata) que o toureiro veste, deixando visível o lado cor-de-rosa da folha. Tome-se em atenção que esta é a cor que faz o touro atacar o toureiro.

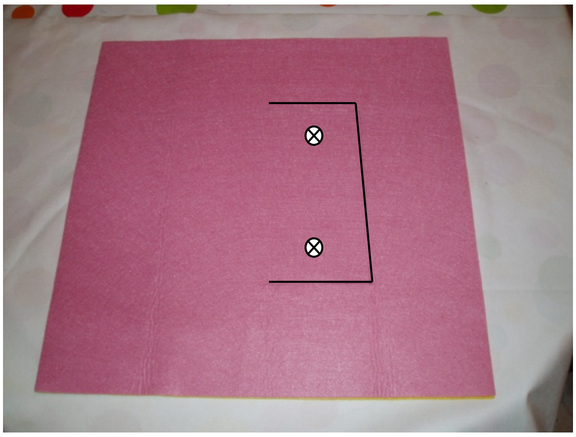


Figura 58: Papel de feltro com uma face cor-de-rosa e a outra face amarela.

2º Passo: Começa-se por dobrar as abas laterais da folha, observando-se que o outro lado da folha tem a cor amarela.

Figura 59: Aba direita dobrada para cima

Figura 60: Ambas as abas são dobradas

3º Passo: Dobram-se as abas superior e inferior, de modo a formar um retângulo (ou quadrado, em particular).

Figura 61

4ºPasso: Dá-se uma última dobra na vertical.

5ºPasso: Inicia-se o processo de desdobrar a folha, começando por levantar a aba lateral direita da mesma. Continua-se o processo até a folha estar completamente desdobrada.




Figura 62: Sequência de imagens que ilustram o método nos 4º e 5º passos.

Depois de toda a folha ter sido desdobrada, constata-se que o lado que ficou visível da folha tem a cor amarela. Foi deste modo possível virar a folha ao contrário, estando uma parte da mesma fixada, não sendo por isso possível movê-la durante todo o processo. Obviamente que o lado da folha que fica voltado para trás é cor-de-rosa.

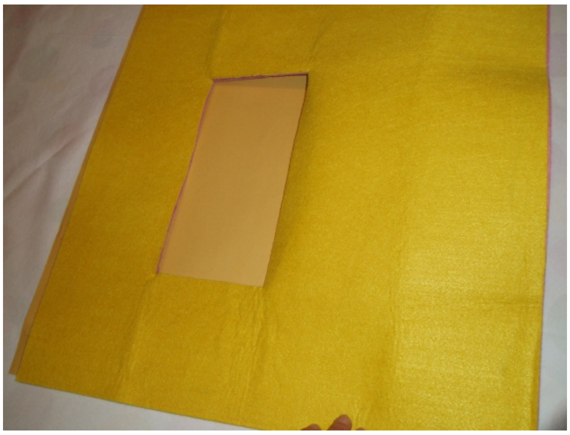


Figura 63: Folha completamente voltada para a face amarela

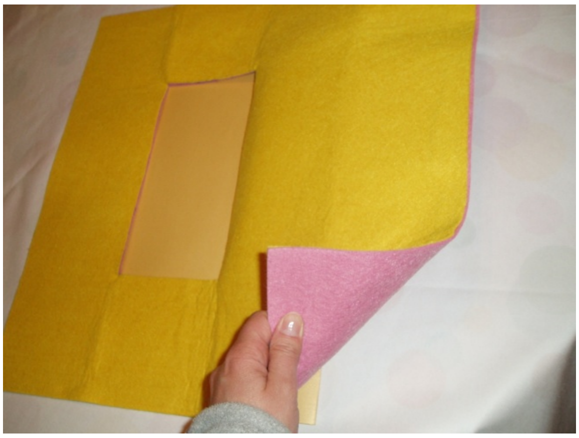


Figura 64: A face cor-de-rosa fica voltada para baixo

Nota: Se o colete, ou bata, em que a folha de papel de feltro está colada for amarela, o efeito obtido é o da Figura 63, uma vez que o recorte da folha fica com a cor amarela de fundo. Se se utilizar papel de feltro deve-se introduzir pequenas placas rígidas em todos os retângulos envolvidos nas dobragens (14 retângulos) para impedir que os voluntários virem a folha ao contrário, à força, dobrando todo o material, devido à sua maleabilidade, através do buraco existente, que não é o que se pretende que aconteça.

Sugestões

Na hipótese descrita anteriormente sugere-se que seja utilizada, como música de fundo, a música da tourada, para que o contexto em que a cena se passa se tornar o mais próximo da realidade.

Como alternativa, sugere-se a utilização deste truque no contexto de um cruzamento com semáforos para peões. O peão só poderá atravessar a estrada caso o sinal fique verde. Um voluntário desempenha o papel de semáforo, que inicialmente tem o sinal vermelho, e outro terá que mudar o sinal para verde. A sequência de figuras que se seguem é a mesma da descrita na sequência de figuras anteriores (da Figura 58 à Figura 64).

Figura 65: Sequência de figuras referente à sugestão apresentada

5.3. Cordas enlaçadas

Objetivo

Desentrelaçar as cordas.

Material usado

2 cordas

Recursos Humanos

Contorcionista, Palhaço, DJ e 2 voluntários do público

Descrição

O contorcionista pede a colaboração de dois elementos do público, que sejam amigos inseparáveis. Em seguida, descreve a situação que vai ser representada.

Atando duas pessoas com cordas nos pulsos, em que as cordas se cruzam uma na outra, pretende-se que o par se consiga separar, fazendo com que as cordas se desentrelacem, sem nunca retirar as argolas que estão colocadas nos pulsos das suas mãos.

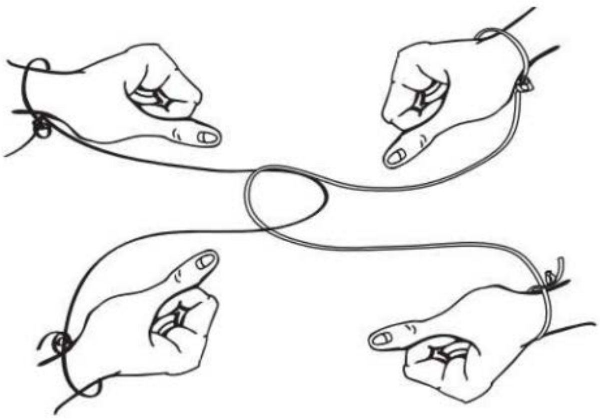


Figura 66

A ideia é que os dois participantes tentem desentrelaçar as cordas. Provavelmente tentarão passar por cima, por baixo, cruzar-se um com o outro, mas nada disto funcionará. É aqui que o contorcionista entra de novo, dizendo que realmente se trata de dois amigos perfeitamente inseparáveis.

Neste momento, entra o palhaço com uma tesoura, sugerindo que cortem as cordas. É o contorcionista que não permite que ele o faça.

Mas como, certamente, os dois elementos do público não querem ir embora de mãos atadas, o contorcionista oferece-se para os ajudar a soltar as cordas.

Assim, vai dando instruções, passo a passo, para que as cordas facilmente se desentrelacem.

O desenlace é feito passando um pedaço de corda de um dos amigos através de um dos buracos que envolvem os pulsos do outro. Dá-se a volta trazendo a corda por cima da mão do outro e solta-se.

As fotografias seguintes ilustram o processo a utilizar.

Figura 67: Enfiam-se as mãos em cada uma das argolas formadas nas pontas das cordas, sendo que estas se encontram cruzadas.

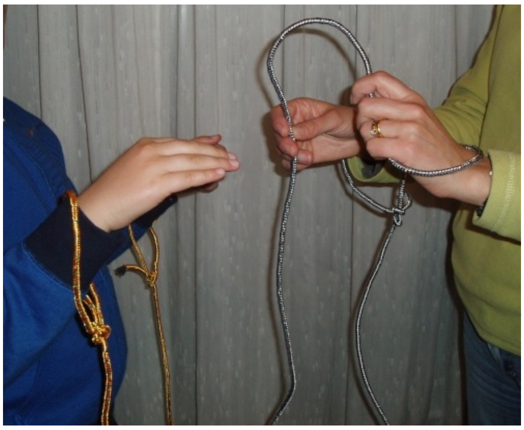


Figura 68: Um dos elementos pega numa parte da sua corda, cinzenta, e forma uma alça.

Figura 69: Essa alça cinzenta é colocada, no outro elemento, por trás da argola amarela que está enfiada na mão do mesmo lado.

Figura 70: Levanta-se a argola amarela.

Figura 71: Puxa-se a alça cinzenta através da argola amarela.

Figura 72: Passa-se a alça cinzenta pela frente da mão do outro elemento e solta-se.

Figura 73: As cordas ficam de imediato desentrelaçadas.

Explicação matemática

Fundamentos matemáticos

A solução para os problemas deste tipo dependem do facto de o circuito formado pelo cordel, braços e corpo não ser uma verdadeira curva fechada, mas sim uma curva separável nos pulsos.

Dicas

Para que esta situação se possa tornar mais divertida, o Palhaço pode aparecer inicialmente, dizendo que vai ajudar, mas na verdade incita os voluntários a dar voltas e reviravoltas sem que as cordas se soltem. Passado algum tempo, aparece com uma tesoura a dizer que resolve rapidamente esta situação cortando a corda. A música usada pode ser "Benny Hill Show".

5.4. Quebra cabeça do anel

Objetivo

Mover um anel para o outro lado das argolas de corda, sem que esta seja cortada.

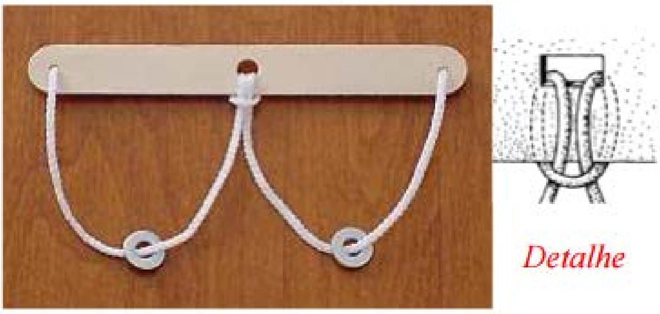


Figura 74

Material usado

Tábua de madeira, corda e 2 argolas

Cada um dos três buracos feito na madeira deve ser menor que cada uma das argolas.

Recursos Humanos

Contorcionista, Palhaço, DJ e 2 voluntários do público

Descrição

O Contorcionista pede a colaboração de dois elementos do público.

Sugere-se que este truque possa ser aplicado num espetáculo, começando por chamar dois colaboradores, que possam ser namorados ou grandes amigos, ao mesmo tempo que se ouve a marcha nupcial. Como os anéis representam a união entre os casais, e para que se possa concretizar o casamento, pretende-se que os participantes consigam juntar os anéis do mesmo lado da estrutura.

Perante a incapacidade dos dois elementos do público conseguirem transpor um anel para junto do outro, o Contorcionista faz a descrição do processo a utilizar.

Vamos mover o anel suspenso da parte direita para a parte esquerda. Puxe o centro do laço para baixo e deslize o anel direito até dentro da área central.

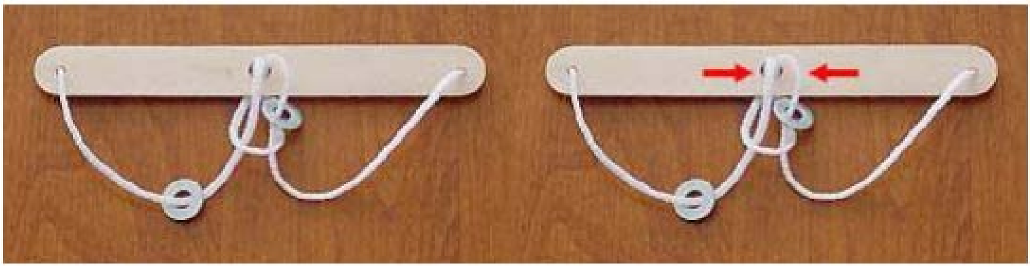


Figura 75

Puxe as duas cordinhas indicadas pela seta (ver imagem da direita, da Figura 75) na sua direção, até um laço duplo aparecer do centro (ver Figura 76).

Figura 76

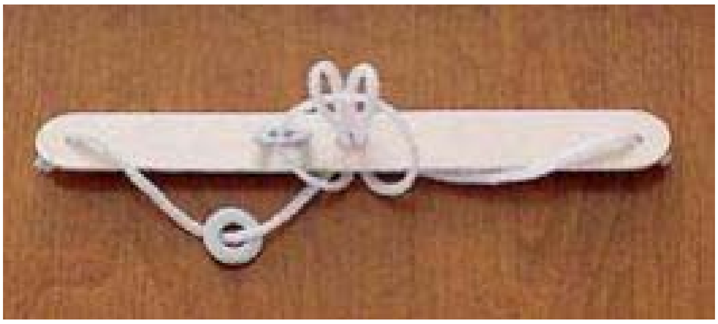


Figura 77

Mova o anel para a mesma posição do outro lado passando pelo interior do laço duplo (ver Figura 77). Agora reverta os dois primeiros passos. Puxe o laço duplo de volta para o centro do buraco (ver Figura 78).

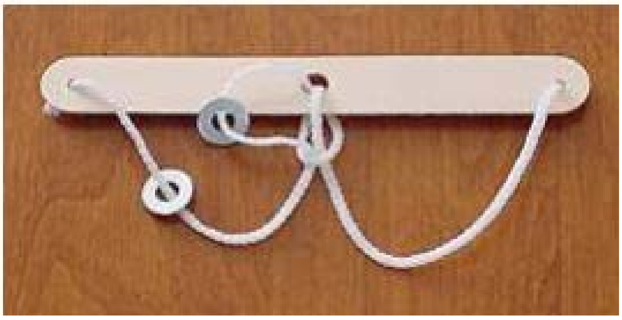


Figura 78

Por fim, deslize o anel por baixo do laço central até ao laço da esquerda.

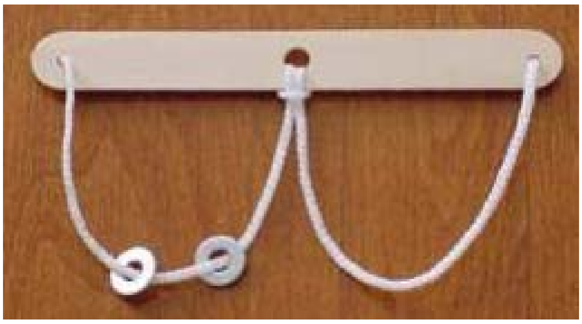


Figura 79

Dicas

Ao longo desta habilidade, o Palhaço pode ir intervindo para criar momentos de confusão e, posteriormente, dar algumas indicações que possam ser uteis ao voluntário que se encontra a manipular o material.

Uma possível música para utilizar durante este truque é a “Marcha Nupcial”.

5.5. Colete refletor

Objetivo

Virar um colete refletor, vestido do avesso, sem o desapertar, e com as mãos algemadas, para a face correta.

Material usado

2 Coletes refletores; 2 cadeiras; 1 guiador (para simular um automóvel); 1 apito e 1 boné de polícia

Recursos Humanos

Contorcionista, Palhaço disfarçado de polícia, DJ e 1 voluntário do público

Descrição

O Contorcionista pede a colaboração de um voluntário do público. Em seguida, descreve a situação que vai ser representada. O Contorcionista e o voluntário do público irão fazer uma viagem, em que o Contorcionista desempenha o papel de condutor do automóvel. Dependendo da idade do voluntário do público, o condutor convida-o a sentar-se nos lugares da frente ou nos de trás (as cadeiras já devem estar colocadas no palco a simular um automóvel). Não são esquecidos os pormenores, em faz de conta, da abertura e fecho das portas, nem da colocação do cinto de segurança. Inicia-se a hipotética viagem, podendo haver momentos de descrição da paisagem ou de pessoas que vão encontrando ao longo do percurso. O condutor simula uma distração e acaba por ter um acidente, embatendo com o carro, ouvem-se os sons de um acidente de carro. Os dois saem do carro e o Contorcionista veste o colete de segurança a si e ao voluntário do público, deixando este do avesso, em ambos.

Neste momento, chega o polícia (Palhaço com os adereços) e pede a documentação ao condutor. Chama a atenção sobre a forma como os dois têm o colete colocado, informando-os que o facto de o colete estar do avesso dá direito a multa e podem ser levados para a esquadra. Por esse motivo, são algemados.

O polícia dirige-se ao voluntário do público, virando-se para ele e questionando-o sobre a sua idade, sobre a origem e o destino da viagem, de modo a entretê-lo. Ao mesmo tempo, e nas suas costas, o Contorcionista vira o colete do direito, sem retirar as algemas. Quando o polícia se dirige ao Contorcionista para colocar as mesmas questões que colocou ao elemento do público, constata que este já tem o colete vestido da forma correta. Fica, por momentos, sem palavras, e a sentir-se desautorizado. O Contorcionista diz que tem o colete bem vestido e o polícia acha este facto impossível de ter acontecido, uma vez que ao verificar as algemas, observa que estas continuam bem fechadas (certifica-se deste facto, mexendo nas algemas). Ficando sem argumentos, o polícia diz que se o elemento do público for capaz de virar o colete para a face correta sem que lhe sejam desapertadas as algemas e sem desapertar o colete, a multa será perdoada e poderão seguir viagem até à oficina mais próxima.

Por fim, o voluntário do público tenta virar o colete ao contrário, respeitando as condições indicadas e, por norma, não é bem-sucedido. É aqui que o Contorcionista explica o truque que usou para virar o colete ao contrário sem que nada fosse desapertado, ficando este vestido do lado direito.

O colete tem que ser retirado pela cabeça, ficando naturalmente virado ao contrário (o que implica ficar virado para o lado direito). Depois, vira-se o colete do avesso, colocando a mão pelo buraco da manga do mesmo lado, e puxando o colete através do mesmo. Volta-se a enfiar o colete pela cabeça, ficando este vestido do lado direito.

Perante esta situação, o polícia vê-se na obrigação de não multar estes viajantes, retirando-lhes as algemas e deixando-os seguir viagem.

Sugestões

Para se tornar mais agradável a encenação, pode haver um adereço que represente a frente de um automóvel, e cadeiras colocadas nos lugares dos ocupantes da viatura. Também o cenário pode ser ajustado ao contexto da situação descrita.

Aconselha-se o uso de sons de sirenes de ambulância, de acidentes de automóveis e da própria condução de automóveis.

Durante a parte do truque em que o voluntário tenta virar o colete é conveniente colocar uma música de fundo. Sugere-se o Foxtrot da Fanfare Ciocarlia.

5.6. Buraco na Folha de Papel

Objetivo

Fazer um buraco numa folha de papel que seja suficientemente grande, para envolver 5 ou 6 pessoas.

Material usado

Folhas de papel A4 e 7 tesouras

Recursos Humanos

Contorcionista, Palhaço, DJ e 5 ou 6 voluntários do público

Descrição

O Contorcionista pede a colaboração de cinco ou seis voluntários do público. Em seguida, entrega uma folha de papel A4 e uma tesoura a cada um deles, lançando-lhes o desafio de fazerem um buraco na folha de papel que os consiga envolver a todos.

Certamente que os participantes irão tentar recortar um buraco na folha de papel, de modo que o contorno fique o mais próximo possível do rebordo da folha, conforme a Figura 86, constatando, naturalmente, que não é suficiente para o pretendido.

Figura 80

Perante a notória e expetável desistência dos participantes, o Contorcionista inicia o processo de corte, como a figuras seguintes ilustram.

Vai dando instruções, passo a passo, para que os participantes, e todo o público perceba o processo que ele está a utilizar.

Figura 81

1ºPasso: Pegar numa folha A4.

Figura 82

2ºPasso: Dobrar a folha em 4 partes iguais.

Figura 83

3ºPasso: Recortar o canto da folha dobrada, conforme imagem.

Figura 84

4ºPasso: Recortar a folha dobrada em "zig-zag", sendo que o último recorte deve ser alinhado com o final do recorte feito no passo 3 (ver Figura 83).

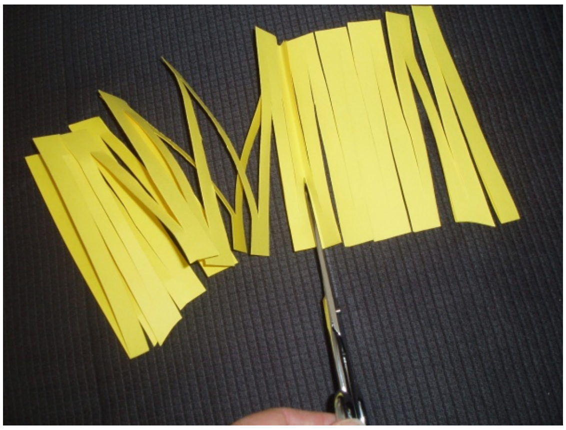


Figura 85

5ºPasso: Recortar pela dobra que divide a folha ao meio, de modo a manter o "zig-zag".

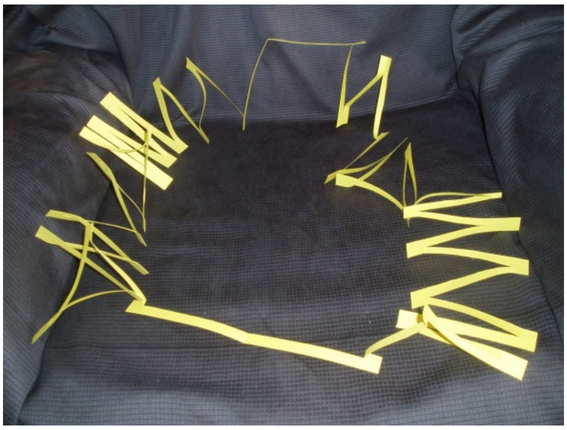


Figura 86

6ºPasso: Abrir a folha recortada e constatar que o contorno criado envolve, com facilidade, 5 ou 6 pessoas, conforme pretendido.

Enquanto o Contorcionista faz, meticulosamente, este recorte na folha de papel, o Palhaço, com o seu modo desajeitado, inicia o seguinte recorte na folha de papel.

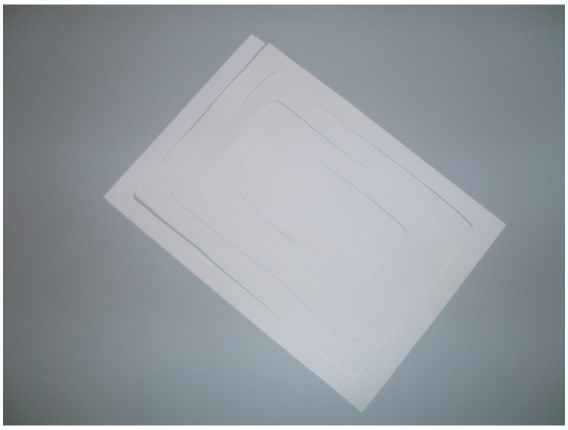


Figura 87

1º Passo: Recortar a folha, em espiral, de modo a obter uma tira comprida de papel.

Figura 88

2º Passo: Fazer um recorte, a meio da largura da tira de papel obtida no 1º Passo, em todo o seu comprimento.

Figura 89

3º passo: Obter uma curva fechada de tira de papel.

No final, com o buraco recortado na folha, consegue, também, envolver todos os voluntários do público. Sugere-se que seja colocada música de fundo enquanto os voluntários estão a recortar o buraco ("Loved by a women", Il Postino).

5.7. Recortes em argolas simples e Fitas de *Möbius*

Objetivo

Surpreender o público com o que se pode obter a partir do corte de argolas simples ou de Fitas de *Möbius,* soltas ou coladas, duas a duas.

Material usado

Tiras de papel, tesoura, fita-cola.

Recursos Humanos

Contorcionista, DJ, 6 voluntários do público e Palhaço (opcional)

Descrição

O Contorcionista pede a colaboração de seis voluntários do público. Em seguida, entrega argolas de papel e uma tesoura a cada um deles, lançando-lhes o desafio de tentarem adivinhar o que vão obter ao cortar as argolas que têm na mão, ao longo de todo o seu comprimento.

Depois de os deixar tentar obter alguma das formas pretendidas, em cada um dos 6 casos que se seguem, vai dando instruções, passo a passo, para que os participantes, e todo o público perceba o processo que ele está a utilizar.

Caso 1

Neste caso, entrega-se a um voluntário do público uma argola simples, conforme Figura 90.

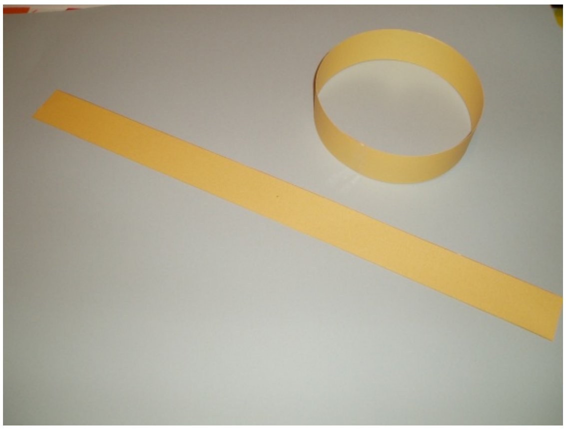


Figura 90

De seguida, recorta-se a argola na direção do seu comprimento, a toda a volta, como se pode ver na Figura 91.

Figura 91

O resultado obtido são duas argolas soltas, com metade da largura da fita que as formou (Figura 92).

Figura 92

Caso 2

No 2º caso, a argola entregue ao voluntário do público é uma Fita de *Möbius*. O modo de construção desta Fita está representado na sequência de fotografias que se pode ver na Figura 93.

Figura 93: Construção da Fita de *Möbius*.

O passo seguinte é recortar a Fitas de *Möbius* na direção do seu comprimento, a toda a volta, a meio da sua largura.

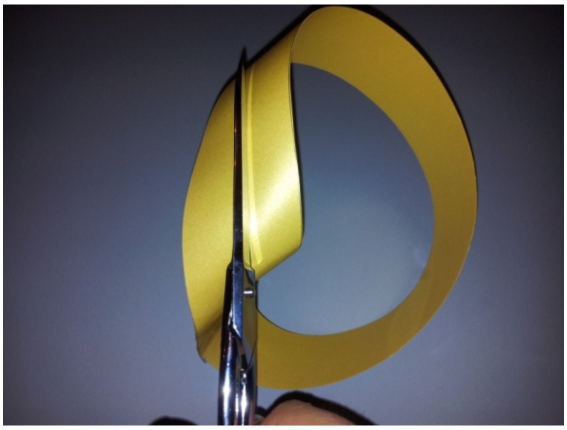


Figura 94

O resultado é uma Fita de *Möbius*, maior que a inicial (ver Figura 95), agora com dupla torcida.

Figura 95

Caso 3

Mais uma vez, no 3º caso, é entregue a um voluntário do público uma Fita de *Möbius*, mas agora com duas torcidas (ver Figura 96). O método usado nesta construção está descrito nas figuras que se seguem.

Figura 96: Construção da Fita de *Möbius* com duas torcidas.

O processo de corte é idêntico ao usado nos casos anteriores, conforme se pode observar na Figura 97.

Figura 97

Como resultado deste 3ºcaso, obtêm-se duas Fitas de *Möbius* entrelaçadas (ver Figura 98).

Figura 98

Caso 4

No 4º caso, entrega-se uma Fita de *Möbius* (Figura 99) a um voluntário do público.

Figura 99

Desta vez, o recorte da tira de papel, é feito na direção do seu comprimento, a toda a volta, mas mantendo sempre a distância ao rebordo da tira de cerca de um terço da sua largura (ver Figura 100).

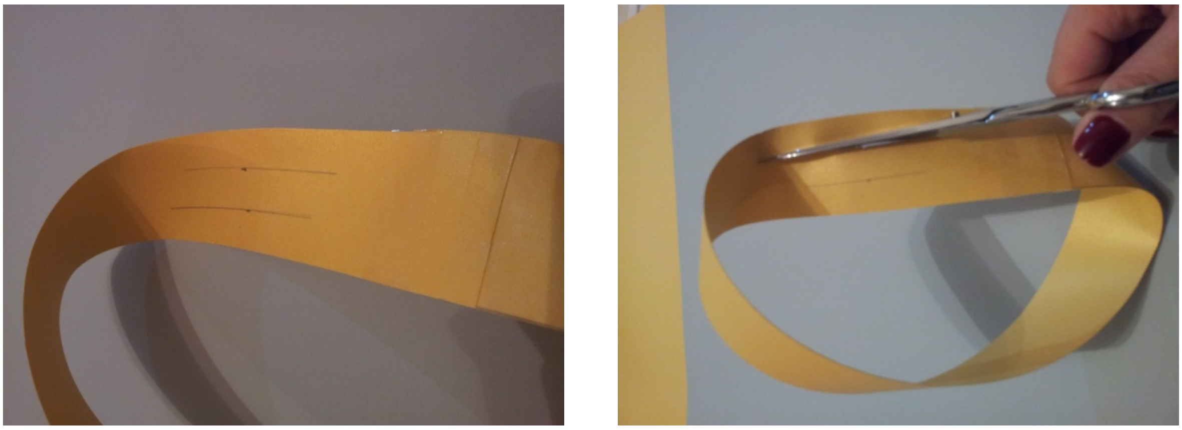


Figura 100: Marcação e recorte a um terço da largura da fita.

Nesta situação, vão-se obter duas Fitas de *Möbius*, entrelaçadas uma na outra, sendo uma delas maior que a outra, conforme Figura 101.

Figura 101

Caso 5

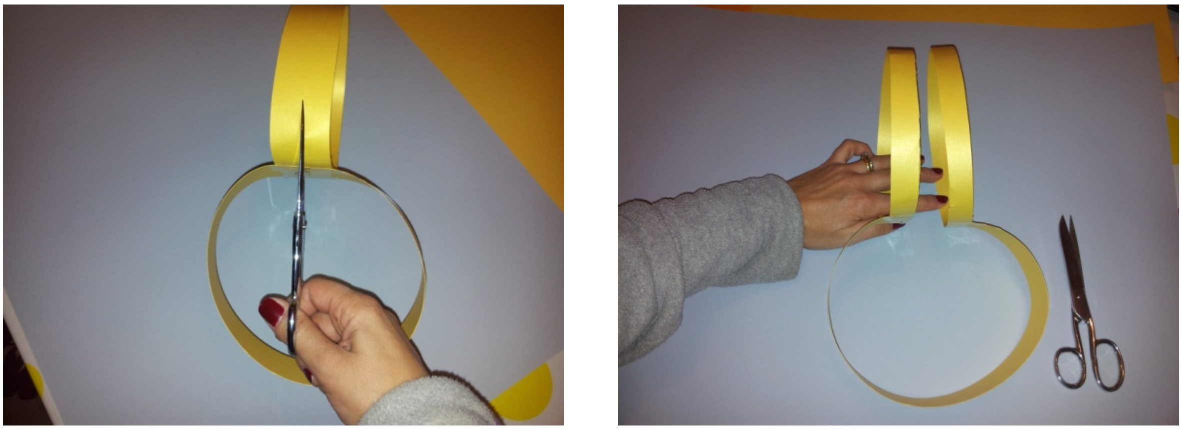
No 5º caso, são entregues a um voluntário do público, duas argolas simples (Figura 102).

Figura 102

O passo seguinte consiste em colar estas argolas de modo a ficarem em posição perpendicular (ver Figura 103).

Figura 103

O terceiro passo diz respeito ao recorte das argolas. Neste caso, recortam-se, ambas as argolas, a toda a volta, de modo a dividir a meio a sua largura (ver Figura 104).



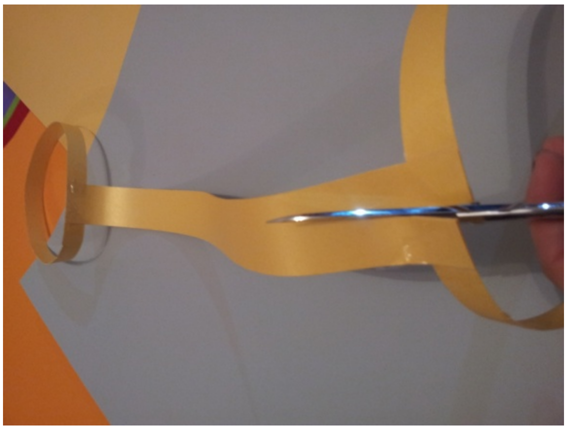


Figura 104

O resultado final é obter uma moldura retangular (ver Figura 105).

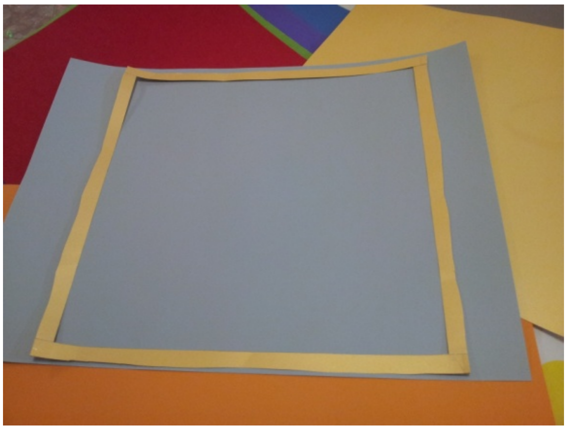


Figura 105

Caso 6

No 6º e último caso considerado, são entregues a um voluntário do público duas Fitas de *Möbius*, com torcidas em sentidos opostos. Em seguida, colam-se estas argolas de modo a ficarem em posição perpendicular. (ver Figura 106)

Figura 106

O método de recorte é igual ao usado em situações anteriores (ver, por exemplo, Figura 104). Passa por recortar, ambas as Fitas, a toda a volta, de modo a dividir a meio a sua largura (ver sequências de imagens da Figura 107).

Figura 107

Neste caso, o resultado final é bastante inesperado, obtêm-se duas argolas entrelaçadas, em forma de coração (ver Figura 108).

Figura 108

Sugestões

Podem ser projetadas imagens das argolas, dando indicação do que é uma argola simples e do que é uma argola com torcida (Fita de *Möbius*). Além disso, depois da realização dos cortes por parte dos voluntários do público, podem mostrar-se as fotografias de todo tipo de argolas e da moldura que se obtiveram, para que todo o público possa ver o que os participantes construíram.

No que diz respeito ao material, fica a sugestão da utilização, para os 4 primeiros casos, de papel usado nas máquinas registadoras, com cerca de 2 metros de comprimento, já previamente preparadas. Nestes casos, podem chamar-se os 4 voluntários em simultâneo, e cada um irá obter um resultado diferente, apesar das argolas que lhes são entregues parecerem, inicialmente, todas iguais. O efeito que se pode obter com o papel das máquinas registadoras contribui para o efeito que se pretendem, pois elas tendem a ficar torcidas.

Tal como noutros truques descritos neste capítulo, a presença de um fundo musical enriquece os momentos mais vazios enquanto os voluntários recontam as Fitas (Música de Circo-Comédia).

6. Truques do Palhaço

Nesse capítulo "Truques do Palhaço", pode-se encontrar truques em que o Palhaço conta histórias com encenação e com utilização de materiais, nomeadamente as cartas, pode-se encontrar a descrição de intervenções que o Palhaço faz em alguns truques descritos anteriormente, como é o caso do "Dia e mês do aniversário" (página 64), tem uma secção dedicada a Anedotas e um Noticiário que vão sendo utilizados ao longo do espetáculo. Nos truques deste capítulo poderão ser usadas músicas para animar os momentos, por exemplo, "Circus Theme Music" ou "Dumbo Circus Parade".

6.1. Mês do aniversário

No final do truque "Dia e mês de aniversário", da página 64, entra o Palhaço que diz saber fazer este truque de uma forma muito mais fácil. Diz que é capaz de adivinhar o mês do aniversário do voluntário recorrendo apenas ao uso de um único cartão.

O cartão usado pode ser, por exemplo, o que se segue:

Figura 109

O Mágico que se encontra ainda no palco diz que não é possível. O Palhaço garante que consegue e chama outro voluntário. Dá instruções para que a resposta à pergunta que lhe vai colocar seja apenas "SIM" ou "NÃO".

Dirige-se ao voluntário e, mostrando-lhe o cartão, pergunta-lhe se o mês em que faz anos se encontra no cartão. Caso o voluntário responda que "SIM", o Palhaço faz uma grande festa e diz que afinal foi possível adivinhar o mês do aniversário do voluntário.

Caso o voluntário responda que "NÃO", que é o mais provável, o Palhaço mostra um ar abatido por não ter conseguido adivinhar, e pergunta ao voluntário se ele tem a certeza e se sabe ler. O Mágico diz-lhe que já era de esperar. O Palhaço pede-lhe uns segundos para pensar sobre o assunto. O Mágico concede-lhe esse tempo, ao fim do qual o Palhaço grita: "Já sei! Já descobri!". O Mágico embora não acredite que isso seja possível, dá-lhe a palavra. O Palhaço diz, muito lentamente: "Tu não fazes anos em janeiro!!!".

No final, o Apresentador dirige-se ao Palhaço e diz-lhe:

- Olha lá, este truque não teve piada nenhuma.

- Mas eu adivinhei. O que eu disse está certo, não está? – responde o Palhaço.

- Sim, mas não serve para nada! – exclama o Apresentador.

- E não é isso que dizem que os matemáticos fazem o tempo todo: coisas muito certas, mas que não servem para nada! – responde o Palhaço.

- Vai-te mas é embora daqui, Palhaço, que só dizes disparates! – reclama o Apresentador.

6.2. Adivinhar o animal preferido

No final do truque “Adivinhar o animal preferido”, da página 68, entra o Palhaço que diz ser capaz de adivinhar se um determinado animal é ou não o preferido do voluntário recorrendo apenas ao uso de um único cartão.

O cartão usado pode ser, por exemplo, o que se segue:

Figura 110

O Mágico que se encontra ainda no palco diz que não é possível. O Palhaço garante que consegue e chama então o novo voluntário. Diz-lhe que à pergunta que lhe vai colocar ele só pode responder com as palavras “SIM” ou “NÃO”.

Ao mostrar o cartão (Figura 113) ao voluntário pergunta-lhe se o seu animal preferido é o que está naquele cartão. Caso o voluntário responda que “SIM”, o palhaço faz uma grande festa e diz que afinal foi possível adivinhar o animal preferido do voluntário.

Caso o voluntário responda que “NÃO”, o Palhaço mostra um ar muito triste e desanimado. Ainda volta a perguntar ao voluntário se ele tem a certeza. O Mágico despreza o trabalho do Palhaço, mas este, numa última tentativa, pede-lhe uns segundos para pensar sobre o assunto. O Mágico concede-lhe esse tempo, ao fim do qual o Palhaço grita: “Já sei! Já descobri!”. O Mágico embora não acredite que isso seja possível, dá-lhe a palavra. O Palhaço diz, muito lentamente: “O teu animal preferido não é o… hipopótamo!!!”.

No final pode ser usado o mesmo diálogo que está descrito no truque “Mês do aniversário”, da página 154.

Nota: Assim como o truque “Adivinhar animal preferido”, da página 68, foi construído à semelhança do truque “Dia e mês do aniversário”, da página 64, também estes truques do Palhaço: “Mês do aniversário” e “Adivinhar o animal preferido”, das páginas 154 e 156, respetivamente, foram construídos de um modo semelhante. O único objetivo foi criar uma alternativa destinada ao Nível 1 (alunos do pré-escolar e 1º ano) que ainda não sabem ler.

6.3. Contas erradas

O Palhaço entra no palco e diz ter vinte e cinco rebuçados para distribuir por cinco pessoas do público (ou pela equipa do circo). Dirigindo-se ao público, pergunta se alguém o pode ajudar a fazer esta conta. O voluntário do público, já no palco, faz a conta indicada pelo Palhaço, escrevendo a operação no quadro.

$$25 \div 5 = 5$$

O Palhaço diz-lhe que a operação está errada! E passa a escrever a sua operação no quadro:

$$25 \div 5 = 14$$

E apresenta de seguida o algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 25 & \;\;5 \\ \cline{2-2} 20 & \;\;14 \\ 0 & \end{array}$$

A explicação para o raciocínio usado neste algoritmo é a seguinte:

"Quantas vezes cabe 5 no 2?

Não cabe!

Quantas vezes cabe 5 no 5?

Uma vez.

$$1 \times 5 = 5$$

5 para 5, nada!

Coloca-se o zero debaixo do 5.

(Baixa-se o 2)

Em 20 quantas vezes cabe o 5?

Cabe 4!

$$4 \times 5 = 20$$

20 para 20, nada!

Coloca-se o zero debaixo do vinte.

O quociente da divisão é 14 e o resto é zero!"

Acrescenta ainda que se pode verificar o cálculo efetuado, usando a prova real.

$$\begin{array}{r} 1\ 4 \\ \times\ 5 \\ \hline 2\ 0 \\ +\ 5 \\ \hline 2\ 5 \end{array}$$

A explicação para este algoritmo é a seguinte:

“$5 \times 4 = 20$

Escreve-se o 20.

$5 \times 1 = 5$

Escreve-se o 5 na linha de baixo.

De seguida, adicionam-se as duas parcelas.

$20 + 5 = 25$

Obtendo-se, deste modo, o resultado pretendido. ”

Perante a expressão de espanto do público, o Palhaço diz que ainda tem outra operação equivalente à anterior para comprovar que o seu cálculo está correto. E passa a apresentar:

$$\begin{array}{r} 1\ 4 \\ 1\ 4 \\ 1\ 4 \\ 1\ 4 \\ +\ 1\ 4 \\ \hline 2\ 0 \\ +\ 5 \\ \hline 2\ 5 \end{array}$$

A explicação para este algoritmo é a seguinte:

“Começam-se por adicionar os algarismos das unidades:

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

Escreve-se o resultado. Em seguida, adicionam-se os algarismos das dezenas:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

Escreve-se este resultado em baixo do 20.

Por fim, adicionam-se estas duas parcelas, obtendo-se assim a soma 25”

Este raciocínio pode ser usado noutras divisões, como por exemplo:

$15 \div 5 = 12$; $24 \div 4 = 15$; $36 \div 6 = 15$; $28 \div 7 = 13$; $48 \div 8 = 15$; entre outras.

Cria-se, com estes algoritmos, um momento divertido, em que o público fica bastante admirado com os resultados obtidos.

6.4. 35 Camelos

Este problema é baseado numa passagem do livro “O Homem que Calculava”, de Malba Tahan (ver em referência bibliográfica: www.coordenacaopedagógica.com.br).

Esta história passou-se com Beremiz Samir, a quem era dado o nome de “O Homem que Calculava”.

“Beremiz e o seu colega de viagem encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.
Por entre pragas e impropérios gritavam, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança estes 35 camelos.

Segundo a vontade de nosso pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed uma terça parte e o mais novo, Harin, deve receber apenas a nona parte do lote de camelos.

Contudo, não sabemos como realizar a partilha, visto que a mesma não é exata.

- É muito simples – falou o Homem que Calculava. Encarrego-me de realizar, com justiça, a divisão se me permitirem que junte aos 35 camelos da herança este belo animal, pertencente ao meu amigo de viagem e que nos trouxe até aqui.

E, assim foi feito.

- Agora – disse Beremiz – na posse dos 36 camelos, farei a divisão justa e exata.

Voltando-se para o mais velho dos irmãos, disse:

- Deverias receber a metade de 35, ou seja, 17,5. Receberás a metade de 36, portanto, 18 camelos. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, ou seja, 12 camelos. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

Por fim, disse ao mais novo:

- Tu, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, ou seja, 4 camelos. O teu lucro foi igualmente notável.

E, concluiu com segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão realizada, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo, e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence a meu amigo de jornada. O outro, cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!"

Descrição

O Palhaço, conhecedor desta história, dirige-se ao público e afirma que consegue dividir os 35 rebuçados que tem na mão de modo a que uma das pessoas fique com metade, outra fique com $\frac{1}{3}$ e uma terceira pessoa fique com $\frac{1}{9}$.

Perante esta afirmação, o Apresentador aproxima-se e diz ser impossível, pois nenhuma destas operações permite obter um número inteiro. E pode mesmo escrever no quadro:

$$35 \div 2 = 17{,}5$$

$$35 \times \frac{1}{3} = 35 \div 3 = 11,(6)$$

$$35 \times \frac{1}{9} = 35 \div 9 = 3,(8)$$

Mas o Palhaço insiste que é possível, dizendo que para tal precisa apenas que lhe emprestem um único rebuçado, passando deste modo a ter 36 rebuçados.

Assim, com os 36 rebuçados ele faz a divisão e obtém os seguintes resultados:

$$36 \div 2 = 18$$

$$36 \times \frac{1}{3} = 36 \div 3 = 12$$

$$36 \times \frac{1}{9} = 36 \div 9 = 4$$

Ao adicionar 18, 12 e 4 obtém a soma 34, o que lhe permite devolver o rebuçado emprestado e ainda fica com um para ele!

Explicação matemática

A explicação deste truque é feita com base na história dos 35 camelos, que obviamente se aplica às habilidades realizadas pelo Palhaço.

O total de 35 camelos, de acordo com o enunciado da história, deve ser repartido, pelos três herdeiros, do seguinte modo:

- O mais velho deveria receber a metade da herança, isto é, 17 camelos e meio;
- O segundo deveria receber um terço da herança, isto é, 11 camelos e dois terços;
- O terceiro, o mais novo, deveria receber um nono da herança, isto é, 3 camelos e oito nonos.

Feita a partilha, de acordo com as determinações do testamento, haveria uma sobra.

$$17 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{2}{3} + 3 + \frac{8}{9} =$$

$$= 17 + 11 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{8}{9} =$$

$$= 31 + \frac{37}{18} =$$

$$= 31 + 2 + \frac{1}{18} =$$

$$= 33 + \frac{1}{18}$$

Observe que a soma das três partes não é igual a 35, mas sim a 33 e $\frac{1}{18}$.

Há, portanto, uma sobra que seria de um camelo e $\frac{17}{18}$ de camelo, relativamente aos 35 camelos iniciais.

A fração $\frac{17}{18}$ exprime a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$, frações estas que representam pequenas sobras.

- Aumentando $\frac{1}{2}$ à parte correspondente ao primeiro herdeiro, ele passaria a receber 18 camelos;
- Aumentando $\frac{1}{3}$ à parte correspondente ao segundo herdeiro, ele passaria a receber 12 camelos;
- Aumentando $\frac{1}{9}$ à parte correspondente ao terceiro herdeiro, ele passaria a receber 4 camelos.

Observe-se que apesar de terem sido feitos estes aumentos com as três pequenas sobras, ainda continua um camelo fora da partilha, pois $18 + 12 + 4 = 34$.

Como foi feito esse aumento das partes de cada herdeiro? Esse aumento foi feito admitindo-se que o total do número de camelos era de 36, e não de 35.

Mas, sendo o dividendo 36, a sobra passa a ser de dois camelos.

Tudo resultou, em resumo, do facto seguinte:

Houve um erro de testamento. Metade de um todo, mais a terça parte desse todo, mais um nono desse todo, não é igual ao todo.

Vejamos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

Para completar o todo, falta, ainda, $\frac{1}{18}$ desse todo.

O todo, no caso, é a herança dos 35 camelos.

$\frac{1}{18}$ de 35, é igual a $\frac{35}{18}$.

Assim, $\frac{35}{18}=1+\frac{17}{18}$.

Conclusão, feita a partilha, de acordo com o testamento, ainda haveria uma sobra de $1+\frac{17}{18}$.

Beremiz, com o artifício utilizado, distribuiu os $\frac{17}{18}$ pelos três herdeiros (aumentando a parte de cada um) e ficou com a parte inteira para si próprio!

6.5. História dos 4 reinos

Material usado

Baralho de cartas, onde foram separados 4 Ases, 4 Reis, 4 Damas e 4 Valetes.

Descrição

A seguinte história acompanha o desenvolvimento da magia que pode ser realizada em conjunto entre o Mágico e o Palhaço, por forma a criar mais interação na apresentação da história. Para ajudar na encenação, podem ser chamados 4 voluntários, que irão ser responsáveis por segurar nas cartas que vão sendo entregues, permitindo deste modo que todo o público consiga ver o que está a ser feito.

Era uma vez, há muito tempo atrás, a terra de Simsalabim, onde existiam quatro reinos. Em cada um desses reinos existia um belo e grande castelo.

Dito isto entregam-se os 4 Ases, virados para a frente, a cada um dos voluntários.

Em cada um desses castelos vivia um feliz e bondoso rei.

E entrega-se um Rei de cada naipe a cada um dos voluntários, sendo que cada voluntário recebe o naipe correspondente ao do Ás que já possuem. Cada voluntário deve segurar as duas cartas de modo a que se consigam ver.

Cada um dos reis era casado com uma bela rainha.

Em seguida são entregues as Dama, que serão entregues no seu respetivo reino (cada voluntário representa um reino).

E com o passar dos anos cada casal teve um lindo principezinho.

Entregam-se, por fim, os Valete nos respetivos reinos.

Como estava tudo tranquilo na terra de Simsalabim, o mago que zelava pela paz entre os reinos, decidiu entrar em férias e por isso começou a fazer as malas.

O Mágico faz um montinho com as cartas relativas a cada reino – mesmo naipe – e coloca os montinhos uns em cima dos outros, virados para baixo.

Foi quando um mago maldoso, aproveitando a oportunidade, resolveu baralhar todos os reinos, e fazer com que nunca mais ninguém se pudesse encontrar.

Lançou a sua maldição: forças do mal, forças do mal, façam dos reinos um caos total!

Enquanto essas palavras são ditas, o Palhaço corta o maço das cartas diversas vezes em qualquer lugar e coloca a parte de cima em baixo, criando a ilusão que as cartas ficam todas baralhadas. Depois distribui as cartas uma a uma, pelos 4 voluntários, com a face para baixo, entregando a primeira carta ao primeiro voluntário, a segunda ao segundo voluntário, a terceira ao terceiro voluntário, a quarta ao quarto voluntário, a quinta novamente ao primeiro voluntário, a sexta ao segundo voluntário e assim por diante.

Ao fim, tudo que era pacífico virou um caos, os reis ficaram presos nas masmorras, as rainhas foram colocadas em uma ilha deserta, os príncipes foram jogados ao mar e os castelos transformaram-se num monte de pedras.

O Mágico pede aos voluntários que mostrem as cartas. Ao virá-las, observa-se que os Reis estão num mesmo monte, as Damas estão em outro, os Valetes em outro e os Ases (castelos) em outro.

Quando o mago bondoso soube do que acontecera não perdeu tempo e voltou. Vendo todo o caos que tinha sido criado, reuniu os seus poderes e começou o seu feitiço: forças do bem se voltem para mim, faça que haja paz em Simsalabim!

Enquanto o Mágico fala, o Palhaço coloca os 4 montes num só, corta-o, pondo o monte de cima em baixo e as cartas, viradas para baixo, são redistribuídas pelos quatro voluntários como foi descrito anteriormente.

E tudo voltou ao normal na terra de Simsalabim, e todos viveram felizes para sempre!

O Mágico pede então aos 4 voluntários que voltem as cartas para o público e, constata-se que as cartas voltaram às suas posições iniciais: cada voluntário tem no seu monte de cartas um Ás, um Rei, um Valete e uma Dama.

6.6. Truques das tabuadas

Tabuada usando os dedos

O Palhaço começa por numerar os dedos de um voluntário do público, como se vê na figura seguinte:

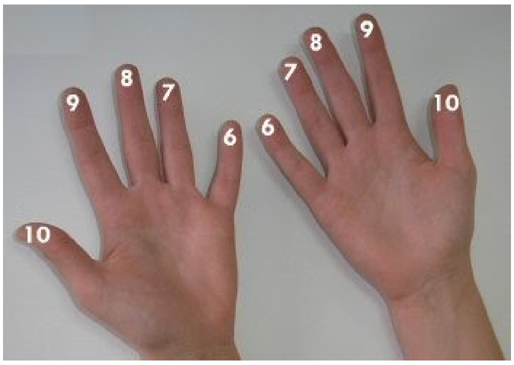


Figura 111

O Palhaço pergunta ao voluntário quanto é 8×9. Por norma, os alunos atrapalham-se e hesitam a dar a resposta de imediato. Em qualquer dos casos, o Palhaço pergunta se o voluntário quer aprender um truque para saber sempre o resultado de qualquer um dos cálculos das tabuadas dos 6 à dos 10.

Assim, retoma o exemplo 8×9 e pede ao voluntário para alinhar o dedo com o número 8 de uma das mãos e o dedo com o número 9 da outra mão. Note-se que, como a multiplicação verifica a propriedade comutativa, a ordem das mãos é completamente indiferente.

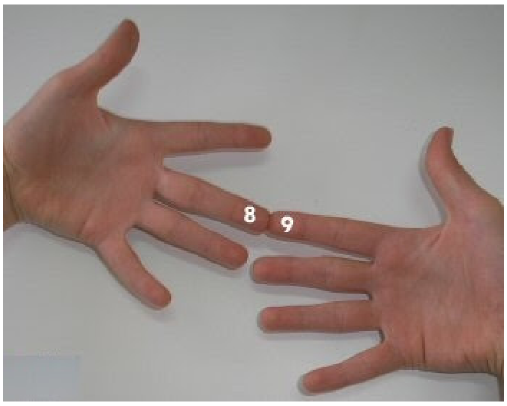


Figura 112

Para se obter o resultado tem que se efetuar os seguintes cálculos:

1º) Cálculo da soma do número de dedos que estiverem abaixo dos dedos que estão em contacto (incluindo estes);

2º) Cálculo do produto dos dedos que estiverem acima dos dedos que estão em contacto. A figura a seguir ilustra a multiplicação;

3º) Adicionam-se os resultados obtidos nos dois primeiros cálculos.

A figura seguinte dá um exemplo do modo de efetuar os cálculos anteriores.

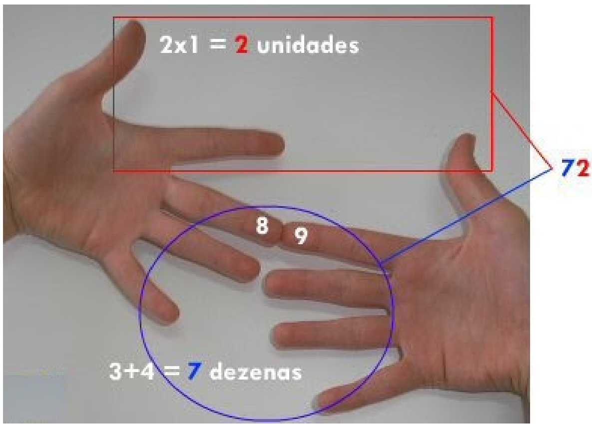


Figura 113

Adicionando 7 dezenas (=70 unidades) a 2 unidades, obtém-se o resultado 72!

Tabuada dos Milagrosa

O Palhaço é convidado pelo Apresentador a completar a tabuada dos 9:

$$9 \times 1 = \_\_$$

$$9 \times 2 = \_\_$$

$$9 \times 3 = \_\_$$

$$9 \times 4 = \_\_$$

$$9 \times 5 = \_\_$$

$$9 \times 6 = \_\_$$

$$9 \times 7 = \_\_$$

$$9 \times 8 = \_\_$$

$$9 \times 9 = \_\_$$

$$9 \times 10 = \_\_$$

O Palhaço diz que apenas sabe o resultado da 1ª, que é 9 e da última que é 90, e preenche os espaços. Depois começa a contar, de cima para baixo, os resultados que não sabe, escrevendo os números à medida que vai contando.

$$9 \times 1 = \underline{9}$$

$$9 \times 2 = \underline{1}$$

$$9 \times 3 = \underline{2}$$

$$9 \times 4 = \underline{3}$$

$$9 \times 5 = \underline{4}$$

$$9 \times 6 = \underline{5}$$

$$9 \times 7 = \underline{6}$$

$$9 \times 8 = \underline{7}$$

$$9 \times 9 = \underline{8}$$

$$9 \times 10 = \underline{90}$$

Depois diz que não sabe se contou bem, e volta a contar, mas agora de baixo para cima, escrevendo de novo os números referentes à contagem que vai fazendo. Obtém então o seguinte:

$$9 \times 1 = \underline{9}$$

$$9 \times 2 = \underline{18}$$

$$9 \times 3 = \underline{27}$$

$$9 \times 4 = \underline{36}$$

$$9 \times 5 = \underline{45}$$

$$9 \times 6 = \underline{54}$$

$$9 \times 7 = \underline{63}$$

$$9 \times 8 = \underline{72}$$

$$9 \times 9 = \underline{81}$$

$$9 \times 10 = \underline{90}$$

E não é que o resultado no quadro é mesmo a tabuada nos 9!

6.7. Anedotas

As anedotas que se seguem servem para quebrar momentos mais tensos no espetáculo ou em truques de execução mais demorada, bem como para fazer ligação entre uns truques e outros. As primeiras são mais apropriadas para um público mais novo. A última só deve ser usada para alunos a partir do 3º Ciclo do Ensino Básico.

Quando é que $2 + 2 = 5$?

R: Quando a conta está errada!

Quando é que 5 e 5 não são 10?

R: Quando são 5 horas e 5 minutos.

Quanto é 8 dividido em duas partes?

R: Na vertical é 3 e na horizontal é 0. (É preciso levar um 8…)

Porque é que o livro de Matemática se atirou dum 8º andar?

R: Porque tinha demasiados problemas.

Porque é que o menino Toneca comeu o TPC de Matemática?

R: Porque a professora disse que era canja.

Como é que se pode duplicar o nosso dinheiro?

R: Colocando-o em frente a um espelho.

Questões rápidas:

Palhaço: 5+5?

Público: 10

Palhaço: Vai lavar os pés

Palhaço: 10+10?

Público: 20

Palhaço: O diabo que te pinte

Palhaço: 20+20?

Público: 40

Palhaço: Dá um pum e rebenta

Qual é coisa qual é ela que é quadrada, amarela e pequena?

R: É um quadrado amarelo pequeno!

Um caçador disparou sobre 3 perdizes. Matou uma. Quantas ficaram?

R: A que morreu porque as outras fugiram.

Quanto tempo dorme o 8?

R: Infinito.

Um homem tinha 20 galinhas. O vizinho levou-lhe 10. Com quantas ficou?

R: 10 ou 30, consoante a resposta dada pelo público, de forma a este nunca acertar.

O que acontece a uma planta pousada no parapeito da janela de uma sala de aulas de Matemática?

R: Crescem-lhe raízes quadradas.

Um matemático farta-se da sua profissão e decide ser bombeiro. O chefe dos bombeiros sujeita-o a um teste: se fores a passar no corredor e vires o contentor do lixo a arder o que fazes?

- Ligo a mangueira à boca de incêndio e apago o fogo.
- E se o contentor já não estiver a arder?
- Deito-lhe fogo.
- O quê!
- Desta forma reduzo o problema a um que já sei resolver!

6.8. Noticiário

Quando se inicia a apresentação do Noticiário pode ser usada uma música de abertura de um noticiário.

Notícias nacionais

- Portugal está nos tops da educação no que respeita o ensino da matemática. Os alunos preferem a aula de matemática a outra qualquer. Em múltiplas entrevistas realizadas por várias escolas os alunos foram unânimes "Se tivessem só mais um dia de vida, escolhiam passá-lo numa aula de matemática. Nunca mais acaba!"

- Ontem um menino comeu o TPC de Matemática…Motivo: a professora disse que era canja.

Notícias internacionais

- A matemática suicidou-se… pois tinha demasiados problemas!

- Foi descoberta a máquina de duplicar dinheiro. Um espetacular e bem conhecido espelho.

- Notícia espantosa: encontraram um número primo exatamente 4 vezes maior que o anterior.

Estatísticas

- Acabou de ser provado por um prestigiado cientista que festejar o aniversário é saudável. A Estatística mostra que aqueles que mais vezes festejam os seus anos, mais velhos se tornam.

- 100% dos acidentes com carros envolvem carros.

- 33% do acidentes de trânsito envolvem pessoas bêbadas… e 67% estão completamente sóbrias. Conclusão do estudo: todos devemos conduzir completamente bêbados.

Metereologia

- Amanhã vai estar muito frio: Prevêem-se zero graus negativos!

Capítulo 7

7. Organização do espetáculo

7.1. Distribuição dos truques por ano de escolaridade

Na tabela que se segue pode-se obter informação sobre qual ou quais as faixas etárias mais adequadas à apresentação de cada um dos truques descritos anteriormente. Os critérios utilizados para a distribuição dos truques foram essencialmente a perceção da dificuldade da execução do truque, o grau de intervenção necessária por parte dos elementos do público, nomeadamente na resolução de operações, manuseamento de cartas ou materiais e o impacto que este tem sobre o público.

Definiram-se, então, quatro níveis, atendendo à faixa etária que contemplam. Assim:

Nível 1: Pré-escolar e 1º ano de escolaridade (inclui alunos do 3 aos 7 anos de idade)

Nível 2: 2ºano ao 4ºano de escolaridade (inclui alunos dos 7 aos 10 anos de idade)

Nível 3: 5ºano ao 8ºano de escolaridade (inclui alunos dos 10 aos 14 anos de idade)

Nível 4: 9ºano ao 12ºano de escolaridade (inclui alunos dos 14 aos 18 anos de idade)

	Identificação do Truque / Ano de Escolaridade	Página	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
3. Truques com Números	3.1. Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*	58			■	■
	3.2. Adivinhar a soma de n números de *Fibonacci*	61			■	■
	3.3. Dia e mês do aniversário	64		■	■	■
	3.4. Adivinhar animal preferido	68	■	■		
	3.5. Adivinhar a data de nascimento	71		■	■	■
	3.6. Adivinhar o algarismo que sobra	74			■	■
	3.7. Palavra do livro	76		■	■	■
	3.8. Adivinhar o pensamento coletivo I	79		■		
	3.9. Adivinhar o pensamento coletivo II	83			■	■
	3.10. Cenário com Prémios	87		■	■	
	3.11. Dados empilhados	90	■	■		
	3.12. Adivinhar o total	92		■	■	
4. Truques com Cartas	4.1. Cinco cartas	95	■	■	■	■
	4.2. Cartas Baralhadas	100		■	■	■
	4.3. Código do aloquete	102		■	■	■
	4.4. A soma é 15!	105		■	■	
	4.5. Quadrado mágico diabólico	107		■	■	■
	4.6. A herança	110		■	■	
	4.7. Sou realmente um génio	112		■	■	■
	4.8. A prova dos nove	114			■	■
	4.9. A bola de cristal	116		■	■	

	4.10. Encontrar o amor	118				
	4.11. A vermelhinha	123				
5. Truques com Topologia	5.1. Braços cruzados	126				
	5.2. Folha ao contrário	128				
	5.3. Cordas enlaçadas	133				
	5.4. Quebra cabeça do anel	136				
	5.5. Colete refletor	139				
	5.6. Buraco na folha de papel	141				
	5.7. Recortes em argolas simples ou Fitas de *Möbius*	145				
6. Truques do Palhaço	6.1. Mês do aniversário	154				
	6.2. Adivinhar animal preferido	156				
	6.3. Contas erradas	157				
	6.4. 35 Camelos	160				
	6.5. História dos 4 reinos	164				
	6.6. Truque das Tabuadas	166				
	6.7. Anedotas	169				
	6.8. Noticiário	171				

Tabela 14: Distribuição dos truques por níveis

7.2. Propostas de Programas

Nesta secção serão apresentadas propostas de programas do espetáculo do Circo Matemático adaptadas a cada nível de faixa etária. (ver páginas 176 a 182). Pretende-se que qualquer leitor consiga com estes programas construir um espetáculo de Circo Matemático, tendo orientações precisas quanto à ordenação dos truques que pode resultar, tendo já havido a preocupação de intercalar os vários tipos de truques, bem como das personagens que intervêm em cada um deles. Além disso, pode consultar a Tabela 1, da página 23, que lhe dará informações sobre os intervenientes que participam em cada truque, o número de voluntários necessários para a execução do truque e, uma proposta da música que pode ser utilizada (no caso de ser necessário) para que a encenação seja a mais bem conseguida possível.

Para o Nível 1 será apenas proposta uma versão para um programa do espetáculo, pois o facto dos alunos desta faixa etária ainda não saberem ler nem efetuar operações condiciona as caraterísticas dos truques usados, o que reduz o leque de opções. Também a duração do espetáculo para este nível será no máximo para 45 minutos, pois a capacidade de concentração destes alunos ainda não é muito elevada.

Para os restantes níveis de escolaridade - Nível 2, Nível 3 e Nível 4 - serão propostas duas versões de programas para cada um dos níveis. Houve, de qualquer modo, a preocupação de alternar a tipologia e os intervenientes que participam em cada truque, na sequência do programa proposto, para que o público usufrua de momentos de diversão que alternam entre o suspense, a admiração, a sensação de impossibilidade, despertando neles o sentimento de curiosidade, bem como o de interesse por descobrir o que está na base de cada uma das habilidades realizadas.

Trata-se apenas de sugestões que poderão ser alteradas, substituindo um ou mais truques por outros descritos ao longo da dissertação.

7.2.1. Nível 1: Pré-escolar ao 1º ano

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
5.5. Colete refletor	Contorcionista/Palhaço/DJ	139
3.4. Adivinhar o animal preferido	Apresentador/Mágico/DJ	68
6.2. Adivinhar o animal preferido	Apresentador/Mágico/Palhaço	156
4.1. Cinco cartas	Apresentador/Mágico/DJ	95
5.3. Cordas enlaçadas	Contorcionista/Palhaço/DJ	133
5.1. Braços Cruzados	Palhaço	126
6.5. História dos 4 reinos	Mágico/Palhaço/DJ	164
3.11. Dados empilhados	Apresentador/Mentalista/DJ	90
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 15: Programa do Nível 1

7.2.2. Nível 2: 2º ao 4ºano

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
3.3. Dia e mês do aniversário	Apresentador/Mágico/DJ	64
6.1. Mês do aniversário	Apresentador/Mágico Palhaço	154
5.3. Cordas enlaçadas	Contorcionista/Palhaço/DJ	133
5.1. Braços Cruzados	Palhaço	126
3.11. Dados empilhados	Mentalista/DJ	90
4.8. A prova dos nove	Mentalista	114
6.3. Contas erradas	Palhaço/DJ	157
5.5. Colete refletor	Contorcionista/Palhaço/DJ	139
6.5. História dos 4 reinos	Mágico/Palhaço/DJ	164
4.1. Cinco cartas	Apresentador/Mágico/DJ	95
3.7. Palavra do Livro	Mentalista/DJ	76
3.8. Adivinhar o pensamento coletivo I	Mentalista/DJ	79
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 16: Programa do Nível 2 - Versão 1

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
3.4. Adivinhar o animal preferido	Apresentador/Mágico/DJ	68
6.2. Adivinhar o animal preferido	Apresentador/Mágico/Palhaço	156
4.2. Cartas Baralhadas	Mágico/DJ	100
3.10. Cenários com prémios	Apresentador/Mentalista/DJ	87
6.6. Truques das tabuadas	Palhaço/DJ	166
5.7. Recortes em argolas simples e Fitas de *Möbius*	Contorcionista/Palhaço (opcional)/DJ	145
6.4. 35 Camelos	Palhaço/DJ	160
4.7. Sou realmente um génio	Mágico	112
3.12. Adivinhar o total	Mentalista/DJ	92
4.3. Código do Aloquete	Mentalista/DJ	102
5.6. Buraco na Folha de Papel	Contorcionista/Palhaço/DJ	141
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 17: Programa do Nível 2 – Versão 2

7.2.3. Nível 3: 5º ao 8ºano

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
3.5. Adivinhar a data de nascimento	Apresentador/Mentalista/DJ	71
6.1. Mês do aniversário	Apresentador/Palhaço	154
4.1. Cinco cartas	Apresentador/Mágico/DJ	95
5.3. Cordas enlaçadas	Contorcionista/Palhaço/DJ	133
5.1. Braços Cruzados	Palhaço	126
3.1. Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*	Apresentador/Mentalista/DJ	58
6.3. Contas erradas	Palhaço/DJ	157
4.6. A Herança	Mágico/DJ	110
4.3. Código do Aloquete	Mentalista/DJ	102
5.5. Colete refletor	Contorcionista/Palhaço/DJ	139
5.6. Buraco na Folha de Papel	Contorcionista/Palhaço/DJ	141
3.9. Adivinhar o pensamento coletivo II	Mentalista/DJ	83
4.1. Cinco cartas	Apresentador/Mágico/DJ	95
3.6. Adivinhar o algarismo que sobra	Mentalista/DJ	74
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 18: Programa do Nível 3 - Versão 1

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
3.3. Dia e mês do aniversário	Apresentador/Mágico/DJ	64
6.1. Mês do aniversário	Palhaço	154
5.4. Quebra cabeça do anel	Contorcionista/Palhaço/DJ	136
3.10. Cenários com prémios	Apresentador/Mentalista/Palhaço/DJ	87
3.7. Palavra do Livro	Mentalista/DJ	76
6.4. 35 Camelos	Palhaço/DJ	160
4.2. Cartas Baralhadas	Mágico/DJ	100
5.2. Folha ao contrário	Contorcionista/Palhaço/DJ	128
4.8. A prova dos nove	Mentalista	114
5.7. Recortes em argolas simples e Fitas de *Möbius*	Palhaço/DJ	145
4.5. Quadrado mágico diabólico	Mentalista/DJ	107
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 19: Programa do Nível 3 – Versão 2

7.2.4. Nível 4: 9º ao 12º ano

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
3.3. Dia e mês do aniversário	Apresentador/Mágico/DJ	64
6.1. Mês do aniversário	Palhaço	154
3.7. Palavra do Livro	Mentalista/DJ	76
5.2. Folha ao contrário	Contorcionista/Palhaço/DJ	128
4.1. Cinco cartas	Apresentador/Mágico/DJ	95
4.3. Código do Aloquete	Mentalista/DJ	102
6.3. Contas erradas	Palhaço/DJ	157
3.1. Adivinhar a soma de dez números de *Fibonacci*	Apresentador/Mentalista/DJ	58
5.5. Colete refletor	Contorcionista/Palhaço/DJ	139
3.9. Adivinhar o pensamento coletivo II	Mentalista/DJ	83
5.3. Cordas enlaçadas	Contorcionista/Palhaço/DJ	133
5.1. Braços Cruzados	Palhaço	126
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 20: Programa do Nível 4 - Versão 1

Programa do Espetáculo	Intervenientes	Página da Descrição do Truque
Entrada	Apresentador	
4.3. Código do Aloquete	Mentalista/DJ	102
5.4. Quebra cabeça do anel	Contorcionista/Palhaço/DJ	136
3.5. Adivinhar a data de nascimento	Apresentador/Mágico/DJ	71
6.1. Mês do aniversário	Palhaço	154
6.8. Noticiário	Apresentador/Palhaço/DJ	171
5.2. Folha ao contrário	Contorcionista/Palhaço/DJ	128
3.6. Adivinhar o algarismo que sobra	Mentalista/DJ	74
5.7. Recortes em argolas simples e Fitas de *Möbius*	Palhaço/DJ	145
4.5. Quadrado mágico diabólico	Palhaço/DJ	107
4.2. Cartas Baralhadas	Mágico/DJ	100
6.7. Anedotas (intercalar ao longo do espetáculo)	Palhaço/DJ	169
Agradecimento e saída	Apresentador	

Tabela 21: Programa do Nível 4 – Versão 2

Capítulo 8

8. Conclusão

"Tudo no Universo está escrito em linguagem Matemática" (Galileu)

Quantas vezes não terão os alunos, ao longo do seu percurso escolar, ouvido dizer, pelos seus professores, que a matemática está em todo o lado? Pois bem, mas hoje em dia e cada vez mais, os alunos não se contentam com palavras. Eles precisam de concretizar… Eles necessitam de exemplos concretos da aplicação da matemática no nosso dia-a-dia. É certo que se pode direcionar esta concretização para as áreas da Engenharia, da Economia, da Física, da Astronomia, da Medicina, enfim, para um leque de opções variadíssimo do qual todos temos conhecimento para poder ilustrar exemplos práticos para os nossos alunos. A verdade é que estas realidades estão, em muitos casos, muito afastadas do seu conhecimento, sendo para eles ainda muito abstratas. Alguns alunos já terão noção do que pretendem vir a "ser quando forem grandes", mas pela experiência que fui recolhendo ao longo do meu percurso profissional, essa verdade não é o reflexo da maioria dos nossos alunos. Talvez arrisque dizer, sem ter um fundamento estatístico para esta afirmação, que a grande maioria dos alunos conclui o 9ºano de escolaridade sem ter verdadeira noção do caminho que pretende seguir. Assim, até lá a matemática assume um papel indefinido, pois mesmo os exemplos anteriormente referidos não têm muito significado para eles. Portanto, há que haver uma outra forma de cativar estes alunos para a matemática.

É aqui que entra um novo ramo da matemática, a Matemática Recreativa.

Segundo Orlandino da Costa (2014), a Matemática Recreativa pode ser definida como "aquela matemática que nos desafia a pensar, nos entretém e nos diverte quando pensamos nela". É através da Matemática Recreativa que se pode desenvolver a capacidade de pensar (raciocínio) e de criar (criatividade), pois nem sempre estas competências são desenvolvidas usando apenas os conteúdos programáticos.

O Prof. Jorge Nuno Silva é da opinião que "um aluno entusiasmado passa por cima das dificuldades ou contrariedades e, com grande entusiasmo, consegue ultrapassar obstáculos. O entusiasmo é uma das grandes chaves para resolver o problema da Matemática. Mas, para se ter alunos entusiasmados é preciso ter professores motivados. E ter professores motivados não é fácil por diversas razões, sendo que uma delas é o facto de o seu trabalho não ser reconhecido como deveria ser." O Professor vai mais longe e acrescenta "uma das estratégias em que mais falhamos é a de não transmitir ao professor uma dose monstruosa de entusiasmo que ele possa passar para os seus alunos" (excertos retirados da entrevista ao Dr. Jorge Nuno Silva, publicada no site da "Associação Ludus").

Aquando da realização da pesquisa para a elaboração deste trabalho, conversei com Tiago Hirth, elemento do núcleo de Lisboa da equipa do Circo Matemático, e ele referiu que os professores, embora salvaguardando as devidas exceções, quando assistem aos espetáculos, se envolvem muito pouco nesta atividade. Talvez por ser uma área onde não se sentem confortáveis. Ele reforça mesmo, que um professor que se disponibilize a participar, mesmo correndo o risco de errar ou de não revelar um desempenho que esteja à altura do que é capaz de fazer na sala de aula, está deste modo, a desenvolver nos seus alunos também a capacidade de arriscar, mesmo errando, pois é assim que a matemática se constrói, por tentativas, erros e novas tentativas. Assim deve ser o papel do Educador. O seu bom, ou menos bom, desempenho numa atividade deste tipo não revela falta de sabedoria, nem é de todo uma fraqueza. Antes pelo contrário, serve de incentivo, de motivação para todo o tipo de alunos e em especial para aqueles que se sentem mais inseguros face à disciplina.

Ao longo do tempo em que estive a trabalhar nesta dissertação, tive oportunidade de experimentar em sala de aula alguns dos truques e habilidades descritas.

Por norma, os alunos com muitas dificuldades e já com uma carga muito negativa em relação ao sucesso do seu desempenho nesta disciplina revelam muita resistência em participar e se envolver nas atividades propostas. No entanto, depois de perceberem o funcionamento e o objetivo da atividade são os primeiros a querer descobrir o porquê e saber como funciona cada um dos truques.

Por outro lado, alunos com uma perspetiva oposta face à disciplina, alunos que sempre tiraram boas notas e atingiram os níveis a que se propuseram sentem estas atividades como mais um desafio que não se podem descuidar. Assim, envolvem-se bastante e são persistentes até conseguirem perceber o que está por trás de cada um dos truques realizados.

A magia só por si já desperta curiosidade e interesse. Uma vez que deste modo se consegue cruzar a magia com matemática, pode-se obter um resultado bastante positivo, aliando os conceitos matemáticos ao prazer de aprender matemática.

Ao consultar "A magia dos Números" (Silva et al, 2016) pode-se ler a opinião de Rieber sobre o modo de ensinar Matemática recorrendo aos jogos:

> ...pesquisa extensa sobre jogos com crianças e adultos, em antropologia, psicologia e educação, indica que os jogos são mediadores importantes para a aprendizagem e socialização ao longo da vida. (Rieber, 1996)

e ainda:

> A utilidade dos jogos como uma ferramenta para o projeto de micromundos vai bastante além das suas características inerentemente motivacionais. Eles oferecem uma função organizacional baseada em fatores cognitivos, sociais e culturais, todos eles relacionados com o ato de jogar. (Rieber, 1996)

Ora, o jogo desperta atenção, curiosidade, e por vezes até fascínio. Esse fascínio está presente também nos espetáculos de circo, pela cor, pela vida e por toda a envolvência entre os artistas e o público.

O Circo Matemático consegue conciliar a vertente dinâmica de um espetáculo com a atenção e curiosidade despertada pelos vários truques matemáticos que se vão realizando. Segundo Jaime carvalho e Silva, são desenvolvidas capacidades quando um aluno é confrontado com um jogo, capacidades estas que também são desenvolvidas num espetador do Circo Matemático, são elas, a capacidade do processamento “paralelo” por parte dos alunos, isto é, a capacidade de recolher informações de diversas fontes simultaneamente; a capacidade de coordenar informação visual proveniente de múltiplas perspetivas; a flexibilidade cognitiva e a transferência de conceitos para um novo domínio e a generalização do conhecimento formal. (Silva et al, 2016)

Assim como todas as atividade de componente lúdica, também o Circo Matemático tem caraterísticas muito próprias: as atividades são exercidas de maneira voluntária; são motivadoras, ou seja, o voluntário participa por prazer, sem depender de prémios externos; necessitam de um envolvimento constante por parte do público e disponibilizam um ambiente, onde os espetadores participam ativamente.

Em cada espetáculo deve-se ter sempre presente que o objetivo principal é contribuir para a aprendizagem de conteúdos curriculares, por isso, cabe depois aos professores transpor a componente lúdica para o objetivo que se pretende atingir.

Durante a fase de pesquisa, e na fase posterior de escrita da dissertação, tive oportunidade para pôr em prática alguns destes truques com alunos das várias faixas etárias. Atendendo a que sou docente do 3ºciclo (Nível 3), consegui ter perceção da reação dos alunos destas idades quando lhes são apresentados os truques e as habilidades descritas ao longo deste trabalho. (ver Fotografia 12) Apresentei truques a alunos cujo interesse e motivação pela aprendizagem da disciplina já existe, e a magia apresentada pelos truques foi recebida com entusiasmo e curiosidade. Ao terem conhecimento que lhes iriam ser apresentados truques matemáticos, a sua reação foi de admiração e de desconfiança. A verdade é que foram bastante recetivos e muito participativos aquando da sua apresentação. Ficaram bastante curiosos para aprenderem novos truques. Por outro lado, quando apresentei alguns truques a alunos cuja disciplina tem já há muitos anos uma conotação bastante negativa, optei por lhes apresentar alguns truques, não dando indicação que o estava a fazer, mas sim, como se fosse um desafio que eles teriam que resolver. As primeiras reações são de frustração e a frase “Isto não é possível” é referida diversas vezes. No entanto, quando estamos munidos de uma dose certa de paciência e persistência, o resultado surge e o bloqueio dos alunos tende a desaparecer. Chegam a pedir que lhes sejam apresentados mais desafios.

Tive também oportunidade de apresentar alguns truques a uma turma do 1ºano de escolaridade (Nível 1) e a outra turma do 4ºano de escolaridade (Nível 2). Relativamente aos alunos do 1ºano (ver Fotografia 10), deu para ter noção do tempo que é necessário despender para se realizar uma habilidade, que noutros níveis é apresentada muito mais rapidamente. Os alunos sentem necessidade de experimentar os truques, e depois, se se permitir que um aluno realize o truque, ou apenas participe como voluntário, todos os outros o querem fazer. Além disso, os alunos sentem vontade de aprender para depois o poderem repetir em casa. No caso dos alunos do 4ºano (ver Fotografia 11), foram várias as situações em que me pediram para explicar devagar o truque, para que eles pudessem tirar apontamentos. O objetivo destes alunos era puder realizar os truques em casa, dizendo que não iriam explicar de imediato aos pais, para que eles também tivessem que pensar, podendo de seguida apresentar a solução inesperada de forma brilhante. Quer no Nível 1, quer no Nível 2, o envolvimento dos alunos é notório em todos os alunos, sejam alunos com bons ou menos bons resultados à disciplina de Matemática. As docentes destas turmas mostraram-se bastante recetivas e entusiasmadas, tendo revelado interesse em receber o espetáculo do Circo Matemático na sua escola.

Fotografia 10: Alunos do 1ºB – Escola Espinho nº2

Com a turma do 1ºB, da Escola Básica de Espinho nº2, do Agrupamento de Escolas Dr. Manuel Gomes de Almeida, executei os truques “Buraco na folha de papel”, “Braços cruzados” e “Dados empilhados”. Para este último truque a professora da turma construiu previamente um dado com as faces numeradas de 1 a 6, a partir da planificação do cubo, e na sessão que realizei com eles foi possível explorar as operações de adição e subtração, através do cálculo mental, fazendo-os determinar “quanto falta para 7”, no caso de se usar apenas um dado; e com alguns alunos, ainda foi possível o mesmo cálculo usando dois dados, fazendo responder mentalmente à questão “quanto falta para 14?”.

Fotografia 11: Alunos da turma 4ºA – Escola Espinho nº2

Antes da interrupção letiva do Natal, tive a oportunidade de poder passar uma tarde com a turma 4ºB, da Escola Espinho nº2, pertencente também ao Agrupamento de Escola Dr. Manuel Gomes de Almeida. Nessa tarde realizei diversos truques além dos que também tinha realizado com os alunos da turma do 1ºano, nomeadamente, "Cordas enlaçadas", "Sou realmente um génio", "A vermelhinha", "Contas erradas" e "Truques das tabuadas". Todos os alunos quiseram participar como voluntários nos truques, mostraram interesse em perceber os truques e o que está por trás de cada um deles, para poderem levar para casa a sua nova habilidade.

Fotografia 12: Alunos da turma 8ºE, Agrupamento de Escolas Sophia de Mello Breyner, Arcozelo

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, V. L., *Matemágica – A arte da matemática*, 2014, Publicação digital (e-book) no formato PDF, obtido em 14 de julho de 2016.

Ball, J., *Pensa num número – Um olhar fascinante sobre o mundo dos números*, Dorling Kindersley – Civilização, Editores, Lda., edição portuguesa, 2005.

Bastos, I., *Magia matemática com Números*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, 2015.

Belmonte, S., *Magia y Matematicas*, magiaymatematicas.blogspot.pt, junho 2013.

Blasco, F., *Performing Mathematical Magic*, Mathematics Department, Universidad Politécnica de Madrid, 2011.

Blum, R., *Matemágica*, Bertrand Editora, 1999.

Borel, E. & Chéron A., *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*, Paris, Gauthier-villars, 1940.

Correia de Sá, C. & Rocha, J., *Treze viagens pelo mundo da Matemática*, U. Porto Editorial, 2010.

EDUCARE, *A Fita de Mobius e suas aplicações*, obtido a 14 de julho de 2016 em http://maraeducare.blogspot.pt/2014/02/aplicaciones-de-la-increible-cinta-de.html.

Escola de Educação Básica Professor Nelson Horostecki. Projeto Político Pedagógico. Chapecó, 2014. (não impresso).

Furtado, P. C., *Brincadeiras envolvendo jogos de mágica e a matemática*. Relatório de Pesquisa (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Comunitária da Região de Chapecó, Chapecó, 2008.

Gardner, M., *Matemática, Magia e mistério, O prazer da Matemática*, Gradiva, 1ª edição, 1991.

Gerdes, P., *Pitágoras Africano: Um estudo em cultura e educação*, Lulu.com, Centro Moçambicano de Pesquisa Etnomatemática, 2012, obtido em 14 de julho de 2016.

Gilbert, E., *Theory of shuffling*, Technical Memorandum, Bell Laboratories, 1955.

Gomes, H. & Martins, A., *Números e sistemas de numeração*- capítulo Números e operações, texto de apoio ao PFCM (ESEV).

Hartung, G., *portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24829*, 2010.

Histórico de Atuações do Circo Matemático de Aveiro, cedido pelo Prof. Ricardo Pereira (atualizado a 08/07/2016).

Nadai, N. & Silva, B., *Quadrado Latino*, disciplina de Elementos de Álgebra, professor responsável Fernando Orihmela, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, maio 2015.

Oliveira, T. J.; Mascarello, T. H.; Grando, C. M.; Andreis, R. F., *Matemática: (re)significando saberes, construindo cidadania.* Revista Pedagógica, Chapecó, n. 30, v. 1, p. 649-666., jan./jun. 2013. Acessado XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

Pimenta, S. G.; Lima, M. S. L., *Estágio e docência.* São Paulo: Cortez, 2004.

Rieber, L. P., Seriously Considering Play: Designing Interactive Learning Environments Based on the Blending of Bicroworlds, Simulations, and Games. Educational Technology Research & Development. Georgia: The University of Georgia, 1996.

Rice, T., *Mathematical Games and Puzzles*, St. Martin's Press, NY, 1973.

Rodrigues, M. M., *Magia Matemática com Cartas*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, 2015.

Sá, A. e Faria, M., *Clube da Matemática – A aventura da descoberta*, Coleção Práticas Pedagógicas, Edições Asa, 1992.

Schlickmann, C., et al, *A utilização de Mágicas envolvendo matemática como atividade desenvolvida por bolsitas do PIBID* (*Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência*); XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014, obtido a 20 de julho de 2016 em https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/RE_Grando_36067474034.pdf.

Scot, R., *The discoverie of witchcraft*, British Library, London, 1584.

Simon, W., *Mathematical Magic*, Charles Scribner's Sons, NY, 1964.

Singh, P., *The So-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India*, Historia Mathematica, 1985.

Silva, J. C., *A história dos Quadrados Mágicos*, História da Matemática, Departamento de Matemática.

Silva, J. C., Martins, G., Paiva, J., *A Magia dos Números: Programa de Apoio à aprendizagem da Matemática*, Academia (www.academia.edu), 2016.

Silva, J. N., *Magia (e batota) Matemática*, Gazeta Matemática, SPM (gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=449, obtido em 14 julho de 2016).

Silva, J. N., *Os Matemágicos Silva*, Lisboa: Apenas, 2008.

Smith, P. & Martins, M., *Matemática discreta*, Departamento de Matemática da Universidade do Minho, fevereiro 2009.

Staicu, V., *Fundamentos de Análise Matemática*, Universidade de Aveiro, 1998.

Páginas da Internet:

http://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/O%20Misterioso%20Numero%20de%20Ouro.pdf, obtido em 26 de julho de 2016.

http://cubomagicobrasil.com/forum/topic/11453-o-problema-dos-35-camelos-o-homem-que-calculava/, obtido a 20 julho de 2016.

http://ludicum.org, obtido a 20 julho de 2016.

http://matemagicasenumeros.blogspot.pt/p/matemagicas.html#.V4UU29QrJH0, obtido a 12 julho 2016.

http://matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=14, obtido a 20 julho de 2016.

http://olhardematematico.blogspot.pt/2012/06/sabe-aqueles-truques-de-multiplicacao.html, obtido a 18 julho 2016.

http://www.cienciaviva.pt/rede/upload/grupo8artigo1gusmao.pdf, obtido a 26 de julho de 2016.

http://stockstillegfosdick.blogspot.pt/2010/05/numero-de-ouro.html

http://portillodesign.com.br/design/o-numero-de-ouro-e-sua-aplicacao-em-design.html

http://www.coordenacaopedagogica.com.br/file.php/1/PAS_2009/Livro_-_Malba_Tahan_-_O_homem_que_calculava_ilustrado_.pdf, obtido a 20 de julho de 2016.

http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/CDChV_M1_FM_2013.pdf obtido a 13 julho 2016.

http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/, obtido a 26 de julho de 2016.

https://www.fibonicci.com/fibonacci/.

http://explorerworld.hu/2012/09/26/meghalt-august-ferdinand-mobius/.

http://disquisicionesantropo-topolgicas.blogspot.pt/2010/07/disquisiones-antropo-topologicas.html.

https://circomatematico.wordpress.com/ , obtido a 20 de julho de 2016.

ludicum.org/ludus

maraeducare.blogspot.pt

http://www.davidcopperfield.com

http://luisdematos.com/.

http://mariodaniel.com/.

https://pt.wikipedia.org/wiki/ .

http://pt.wikihow.com/Embaralhar-Cartas.

https://www.youtube.com/.

https://www.dn.pt.

ANEXOS

Em anexo apresenta-se o Histórico das Atuações da equipa do Núcleo de Aveiro do Circo Matemático (páginas 193 e 194). O material que seguinte é composto pelas tabelas que ao longo dos vários truques foram sendo identificadas como sendo material que estaria disponível para reprodução. Segue-se a listagem do referido material.

1. Truque: Dia e mês do aniversário (Páginas 196 a 205)
   1.1. Figura 29: Tabelas com nomes dos meses
   1.2. Figura 30: Tabelas com os dias dos meses
   1.3. Figura 109

2. Truque: Adivinhar o animal preferido (Páginas 207 a 212)
   2.1. Tabela 6: contém todos os animais
   2.2. Tabela 7: animais selecionados com preparação prévia para o truque
   2.3. Figura 110

3. Truque: Adivinhar o pensamento coletivo (Páginas 214 a 220)
   3.1. Figura 31: Grelha com figuras – Aplicar ao Nível 2 e 3
   3.2. Figura 33: Grelha com figuras, ordem alterada – Aplicar ao Nível 2 e 3
   3.3. Grelhas completas, original e alterada – Aplicar ao Nível 2 e 3
   3.4. Figura 35: Grelha com figuras – Aplicar ao Nível 3 e 4
   3.5. Figura 37: Grelha com figuras (3ºCiclo), ordem alterada – Aplicar ao Nível 3 e 4
   3.6. Figura 39: Grelha com figuras (Secundário) – Aplicar ao Nível 4
   3.7. Grelha com figuras, ordem alterada – Aplicar ao Nível 4

4. Cenários com prémios (Página 222)
   4.1. Figura 40: Imagem projetada/afixada com prémios

Histórico de Atuações

Circo Matemático – Núcleo de Aveiro

Local	Data	Sessões	Público	Nº alunos
Colégio de Bustos	08/03/12	3	Alunos 2º e 3º CEB	300
Dmat - Encontro antigos alunos	10/03/12	1	Antigos alunos de Matemática	80
ES João Gonçalves Zarco - Matosinhos	20/03/12	2	Alunos 3º CEB e secundário	300
UA - Competições PMatE	23/04/12	2	Alunos 2º CEB	400
UA - Competições PMatE	24/04/12	2	Alunos 3º CEB	400
ES João Gonçalves Zarco - Matosinhos	17/05/12	1	Alunos de cursos profissionais	40
ES Pampilhosa da Serra	18/05/12	2	Alunos 1º e 2º CEB	200
Santa Maria da Feira	19/05/12	1	Alunos 2º e 3º CEB	100
EP do Instituto Nun' Alvres - Santo Tirso	18/06/12	1	Alunos Ensino profissional	100
UA - Academia de Verão	20/07/12	1	Alunos ensino secundário	20
Museu da Cidade - Aveiro	28/09/12	1	Alunos 2º CEB	50
UA - Semana Ciência e Tecnologia	23/11/12	1	Alunos 1º CEB	200
Colégio casa mãe - Porto	10/01/13	2	Alunos do 2º e 3º CEB	200
Colégio de Bustos	05/03/13	2	Alunos 2º e 3º CEB	200
UA-Dmat - Tutoria	06/03/13	1	Alunos de licenciatura	40
UA - Escola de Vilela	15/03/13	1	Alunos 3º CEB	100
ES José Régio de Vila do Conde	23/04/13	1	Alunos secundário	120
ES da Maia	23/04/13	1	Alunos 3º CEB	120
ES Mário Sacramento, Aveiro	22/05/13	1	Alunos 3º CEB e secundário	40
UA - Academia de Verão	12/07/13	1	Alunos 2º CEB	20
UA - Semana Ciência e Tecnologia	19/11/13	1	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB e secundário	200
ES José Estêvão, Aveiro	19/11/13	1	Alunos ensino secundário	200
Colégio Nova Encosta, Paços de Ferreira	20/11/13	1	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB e secundário	130
Escola EB 2,3 de S. Torcato, Guimarães	07/02/14	1	Alunos 3º CEB	150
UA - Curso professores brasileiros	14/02/14	1	Prof. de matemática e alunos de CM II	45
ES da Maia	14/03/14	2	Alunos 3º CEB	240
Instituto Politécnico de Viseu	19/03/14	1	Alunos do 1º ao 9º ano	270
E.E. de Santa Joana, Aveiro	22/04/14	1	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB	180
Colégio de Bustos	23/04/14	2	Alunos do 1º ao 5º anos do EB	200
ES Jaime Magalhães Lima, Aveiro	24/04/14	1	Alunos 3º CEB e secundário	100
UA - Competições PMatE	28/04/14	1	Alunos do ensino secundário	180
ES Dr. Manuel Gomes de Almeida, Espinho	30/04/14	1	Alunos do 5º ao 9º anos do EB	300
UA - ES Filipa Vilhena, Porto	13/06/14	1	Alunos do 8º ano	70
UA - Academia de Verão	11/07/14	1	Alunos do 2º CEB e ensino secundário	40
UA -Hands on Science	25/07/14	1	Professores e investigadores	20
UA - tutoria	08/10/14	1	Alunos da licenciatura	30
UA - Semana Ciência e Tecnologia	24/11/14	1	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB	250
Junta de Freguesia de São Pedro de Fins	17/12/14	1	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB	50
RMC IV, Pavilhão do Conhecimento	25/01/15	1	Público em geral e congressistas	50
AE de S. Pedro da Cova	13/02/15	2	Alunos do 3º CEB	200
Didáxis - Riba de Ave	19/02/15	2	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB	700
Didáxis - Riba de Ave	20/02/15	2	Alunos do 1º, 2º e 3º CEB	500
Escola EB 2,3 de S. Torcato, Guimarães	17/04/15	1	Alunos do 9º ano	120
ES da Maia	20/04/15	2	Alunos 2º e 3º CEB	240
EB 1 de Travanca	22/04/15	1	Alunos do 1º CEB	46
ES José Estêvão, Aveiro	23/04/15	1	Alunos 2º CEB	50
Centro Ciência Viva, Vila do Conde	07/05/15	2	Alunos do 2º, 3º CEB e secundário	160
UA - Competições PMatE	14/05/15	1	Alunos do secundário	80
EB23 de Aradas, Aveiro	22/05/15	1	Alunos 2º e 3º CEB	120
UA - Escola EB1 da Glória	28/05/15	1	Alunos do 4º ano	100
EB1 de Laginhas na Branca	03/06/15	1	Alunos do 3º e 4º anos	50
Externato de Vila Meã Amarante	08/06/15	2	Alunos do 2º, 3º CEB e secundário	200
UA - Academia de Verão	10/07/15	1	Alunos do 2º CEB e ensino secundário	40

Fábrica da Ciência Viva Aveiro	25/09/15	1	Pais e Filhos	120
UA - Externato Mª Auxiliadora - V. Castelo	29/10/15	1	Alunos do 2º, 3º CEB e secundário	100
Coimbra - Congresso	30/10/15	1	Público em geral e congressistas	50
Escola profissional de Tondela	25/11/15	2	Alunos Ensino profissional	300
UA - Semana Ciência e Tecnologia	27/11/15	1	Alunos do 2º, 3º CEB e secundário	120
ES Dr. Manuel Gomes de Almeida, Espinho	16/12/15	1	Alunos do 2º CEB	100
EB 23 Nicolau Nasoni, Porto	17/12/15	2	Alunos do 2º e 3º CEB	200
AE de Paços de Brandão	12/01/16	2	Alunos do 2º e 3º CEB	400
Ass. de Promoção Social de Fornos de Algodres	27/01/16	1	Adultos	100
Colégio de Nossa Senhora da Bonança, Gaia	22/02/16	2	Alunos do 1º, 2º, 3º CEB e secundário	400
Escola Secundária José Falcão, em Coimbra	15/03/16	2	Alunos do ensino secundário	200
Escola Secundária de Vieira do Minho	17/03/16	2	Alunos do 2º, 3º CEB	300
UA - Escola básica do Paul	07/04/16	1	Alunos do 3º CEB	50
ES Marques Castilho, Águeda	29/04/16	1	Alunos do 2º, 3º CEB e secundário	200
ES José Estêvão, Aveiro	04/05/16	1	Alunos do 2º CEB	70
AE de Oliveira do Bairro	06/05/16	1	Alunos do ensino secundário	25
UA - Competições PMatE	11/05/16	1	Alunos do ensino secundário	200
ES da Gafanha da Nazaré	03/06/16	1	Alunos do 2º, 3º CEB	150
UA - Academia de Verão	08/07/16	1	Alunos do 2º, 3º CEB e secundário	60

Dia e mês do aniversário

CIRCO MATEMÁTICO

Jan Mar

Mai Jul

Set Nov

Fev Mar

Jun Jul

Out Nov

CIRCO MATEMÁTICO

Abr

Mai

Jun

Jul

Dez

CIRCO MATEMÁTICO

Ago

Set

Out

Nov

Dez

CIRCO MATEMÁTICO

1	3	5	7	9
11	13	15	17	
19	21	23	25	
27	29	31		

CIRCO MATEMÁTICO

2	3	6	7	10
11	14	15	18	
19	22	23	26	
27	30	31		

CIRCO MATEMÁTICO

4	5	6	7	12
13	14	15	20	
21	22	23	28	
29	30	31		

CIRCO MATEMÁTICO

8	9	10	11	12
13	14	15	24	
25	26	27	28	
29	30	31		

CIRCO MATEMÁTICO

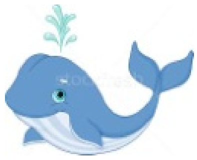
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

CIRCO MATEMÁTICO

JAN

Adivinhar o animal preferido

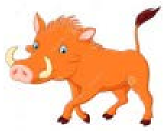
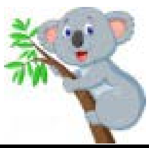
CIRCO MATEMÁTICO








CIRCO MATEMÁTICO

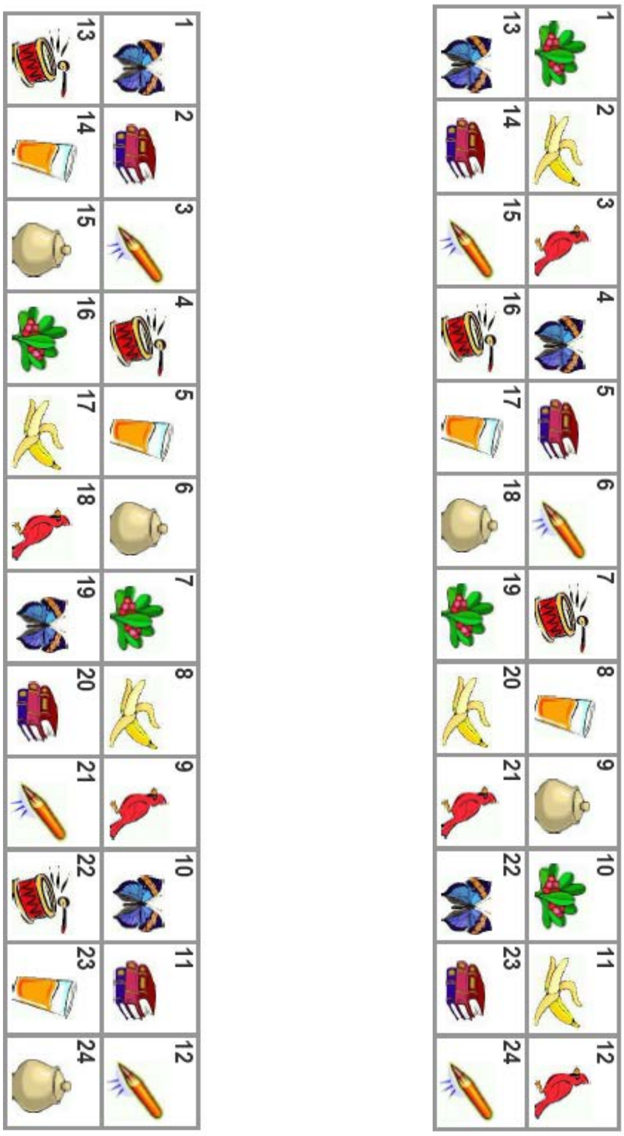
CIRCO MATEMÁTICO

CIRCO MATEMÁTICO

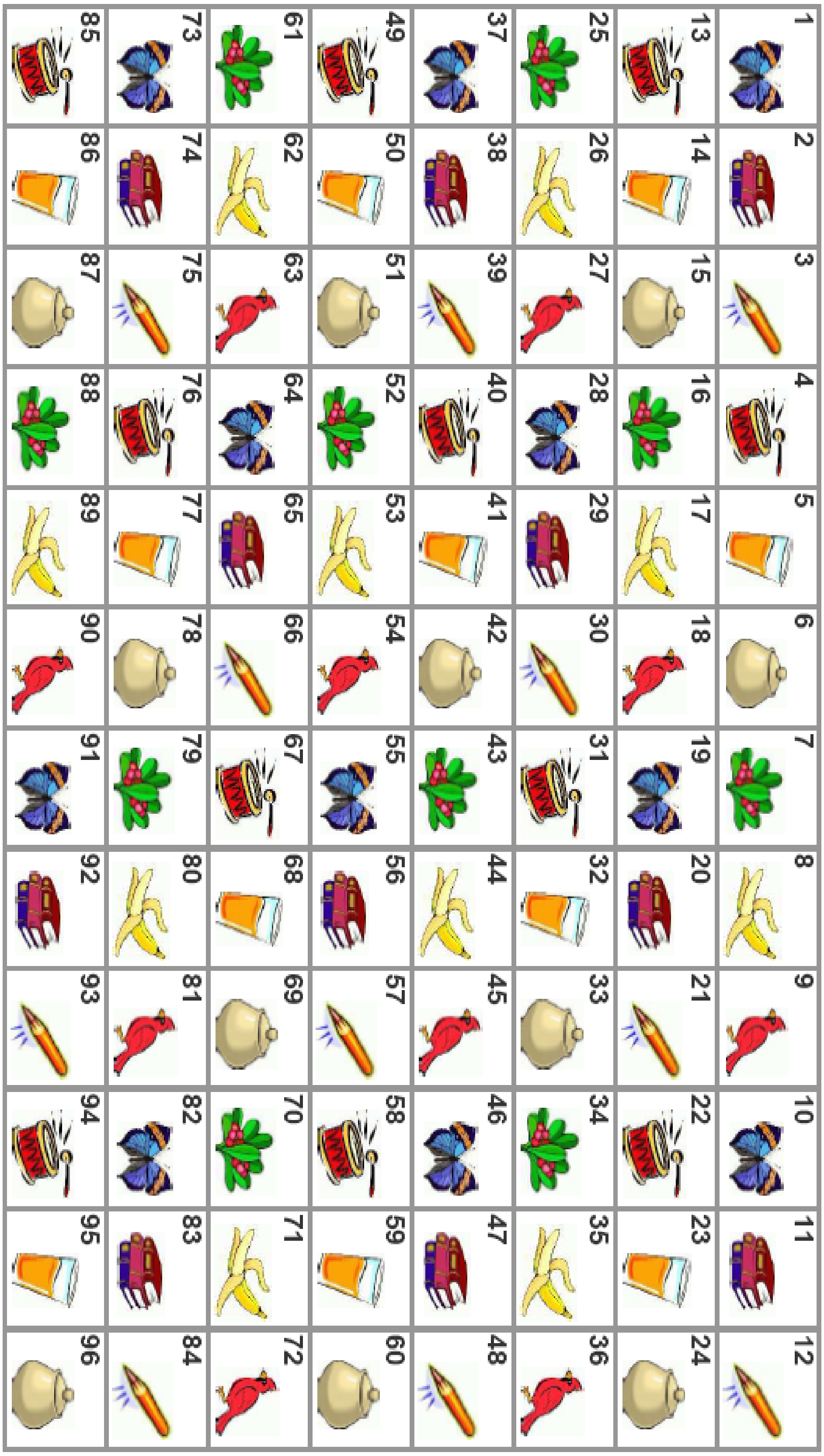
CIRCO MATEMÁTICO

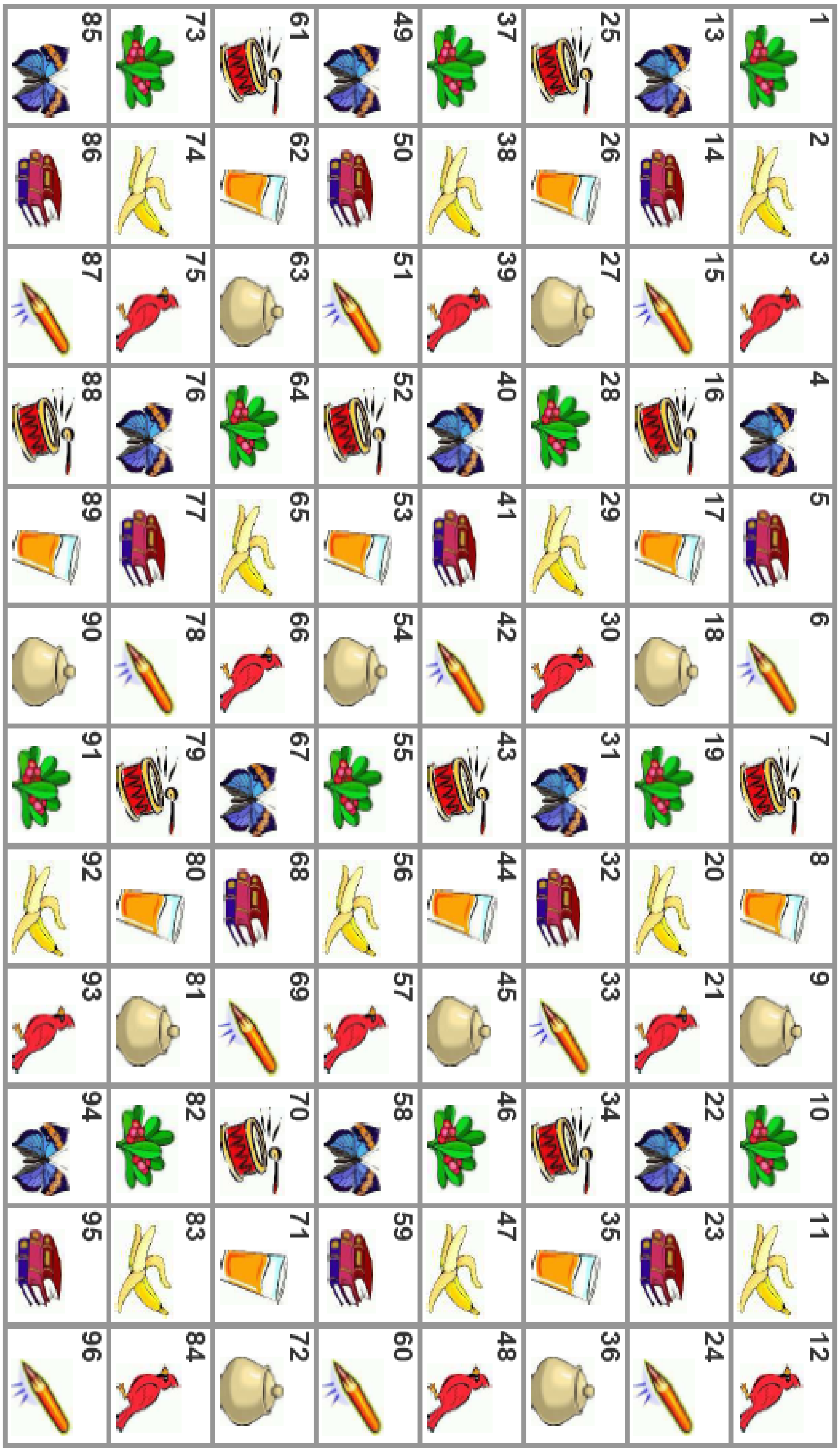
CIRCO MATEMÁTICO

Adivinhar o pensamento coletivo



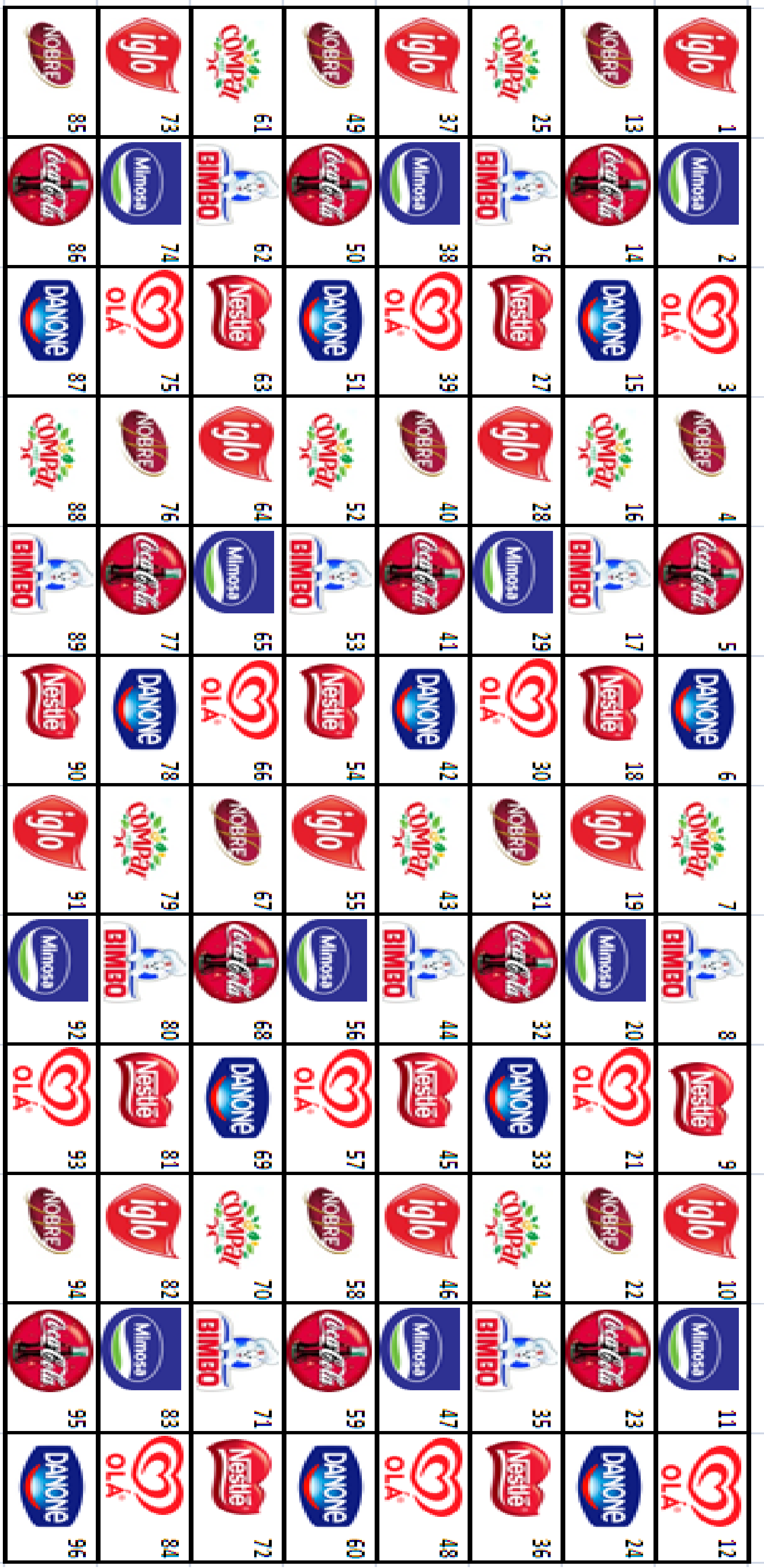
Grelha para Nível 2 e 3: Original e alterada


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72
73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84
85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96

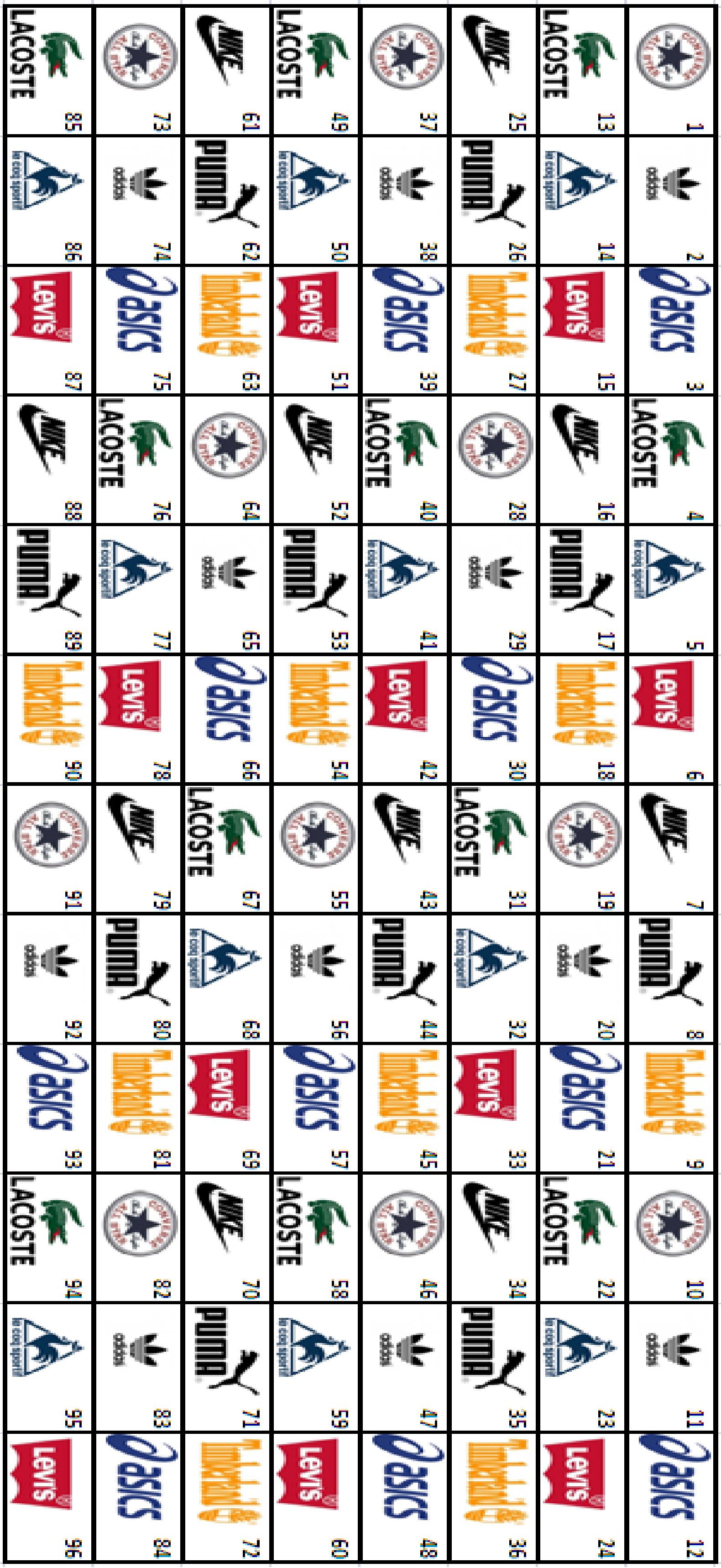


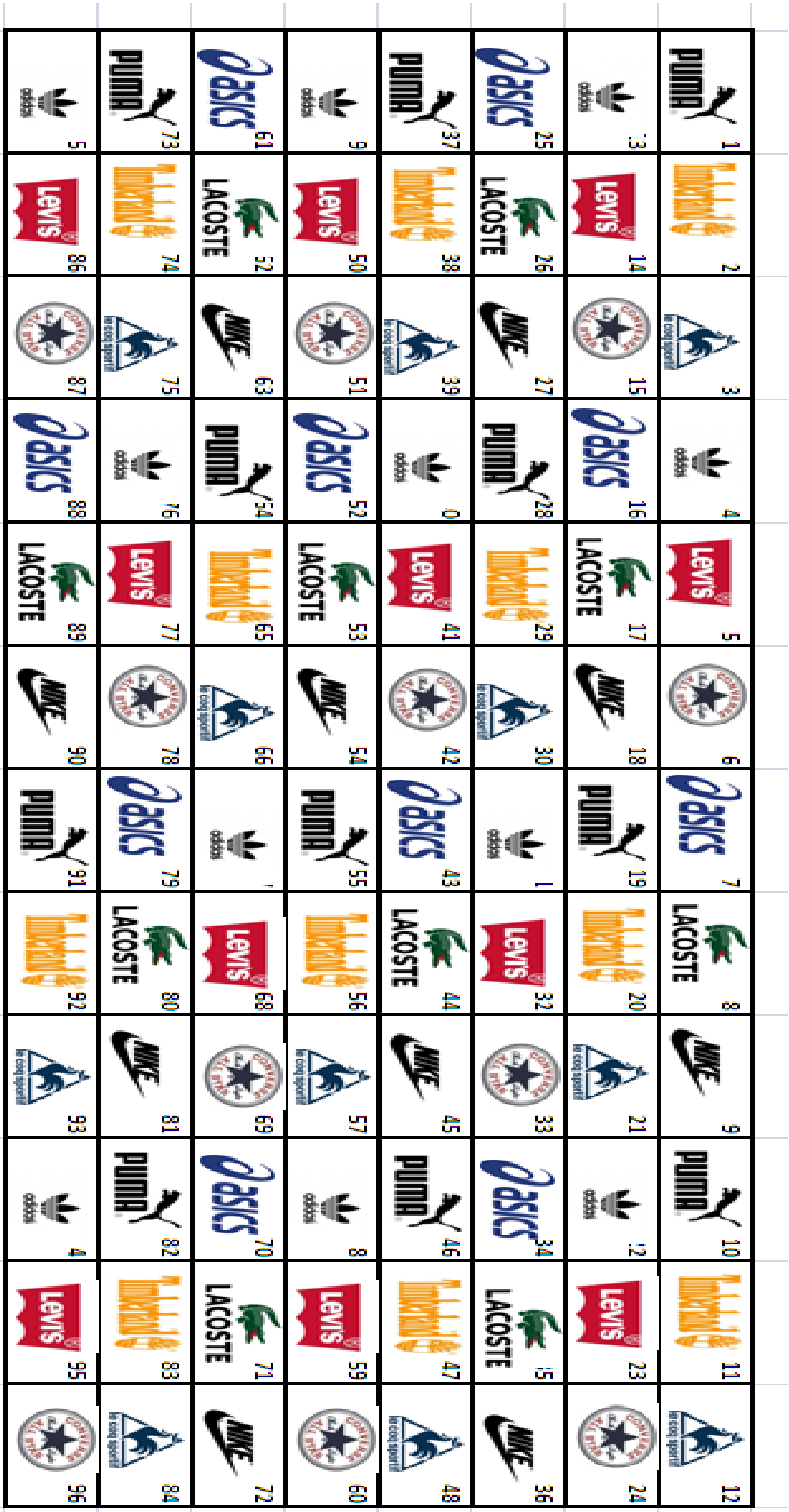
Grelhas completas para Nível 2 e 3: Original e alterada

1 BIMBO	2 Coca-Cola	3 COMPAL	4 DANONE	5 iglo	6 Mimosa	7 Nestlé	8 NOBRE	9 OLÁ	10 BIMBO	11 Coca-Cola	12 COMPAL
13 DANONE	14 iglo	15 Mimosa	16 Nestlé	17 NOBRE	18 OLÁ	19 BIMBO	20 Coca-Cola	21 COMPAL	22 DANONE	23 iglo	24 Mimosa
25 Nestlé	26 NOBRE	27 OLÁ	28 BIMBO	29 Coca-Cola	30 COMPAL	31 DANONE	32 iglo	33 Mimosa	34 Nestlé	35 NOBRE	36 OLÁ
37 BIMBO	38 Coca-Cola	39 COMPAL	40 DANONE	41 iglo	42 Mimosa	43 Nestlé	44 NOBRE	45 OLÁ	46 BIMBO	47 Coca-Cola	48 COMPAL
49 DANONE	50 iglo	51 Mimosa	52 Nestlé	53 NOBRE	54 OLÁ	55 BIMBO	56 Coca-Cola	57 COMPAL	58 DANONE	59 iglo	60 Mimosa
61 Nestlé	62 NOBRE	63 OLÁ	64 BIMBO	65 Coca-Cola	66 COMPAL	67 DANONE	68 iglo	69 Mimosa	70 Nestlé	71 NOBRE	72 OLÁ
73 BIMBO	74 Coca-Cola	75 COMPAL	76 DANONE	77 iglo	78 Mimosa	79 Nestlé	80 NOBRE	81 OLÁ	82 BIMBO	83 Coca-Cola	84 COMPAL
85 DANONE	86 iglo	87 Mimosa	88 Nestlé	89 NOBRE	90 OLÁ	91 BIMBO	92 Coca-Cola	93 COMPAL	94 DANONE	95 iglo	96 Mimosa



Grelhas para Nível 3 e 4: Original e alterada





Grelhas para Nível 4: Original e alterada

Cenário com prémios


PARTIDA